F. KRBEK

FIZICA TRĂITĂ

EDITURA ŞTIINŢIFICĂ

F. KRBEK

FIZICA TRĂITĂ

CĂLĂTORIE PRIN ŞTIINŢELE NATURII

EDITURA ŞTIINŢIFICĂ
BUCUREŞTI, 1959

F. KRBEK

ERLEBTE PHYSIK

AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT
GEEST & PORTIG K.—G.
Leipzig, 1956

Interesul pentru fizica teoretică și experimentală, în anii noștri, depășește cercul strîmt al specialiștilor. Despre principiul relativității restrînse și generalizate, despre echivalența masă-energie, despre acceleratori de particule sau despre lansarea sputnicilor discută cu aprindere tinerii școlari, muncitorii, tehnicienii, inginerii, literații. Informațiile și articolele din paginile științifice ale cotidianelor și din revistele de popularizare a științei sînt urmărite și comentate; vocabularul științific pătrunde în limba literară și în limba de toate zilele.

Este firească această dorință de informare. Sub ochii a două generații, s-au produs radicale prefaceri ale tehnicii, care își au reflexul în viața cea de toate zilele. Cu razele Röntgen se întîlnește omul în policlinici și spitale. Radioul și televizorul au o prezență vie și cotidiană în viața socială. Deasupra capetelor noastre zboară avioane cu viteze sonice și supersonice. Uriașii sateliți artificiali sovietici învinge — în fața ochilor noștri — atracția gravitației pămîntești, ducînd pe căile cosmosului tone-masă și aparate care transmit informații culese direct din apropierea corpurilor cerești. Minunata istorie a semiconductorilor se scrie și ea în epoca noastră; ea promite revoluționarea radiotehnicii și a metodelor de utilizare a energiei solare. Mașinile electronice de calculat deservesc strălucit puterea umană de investigație și devin „creierii" ansamblelor automate.

În sfîrșit nucleul atomic, ale cărui depozite inepuizabile de energie s-au deschis sub bagheta fizicii noi, vorbește omenirii despre puterea cunoașterii.

La începuturile ei, fizica a fost o simplă colecție de observații experimentale. Prin generalizarea și abstractizarea cunoștințelor dobîndite din contactul nemijlocit cu realitatea, s-au născut noțiunile care exprimă fenomenele și mărimile fizice. Fiecare dintre aceste noțiuni: forță, impuls, moment, căldură, energie, undă, cîmp etc. au o istorie a lor plină de dibuiri, de lupte, de consolidări și prăbușiri. Am putea aminti, de pildă, noțiunea de eter, care a avut o evoluție de mii de ani pînă cînd — o dată cu descoperirea relativității — s-a prăbușit definitiv, lăsînd locul unor noțiuni care exprimă mai just esența fenomenelor fizice. Sau noțiunile de timp și spațiu, de continuu și discontinuu, de atom și de particulă elementară, care se îmbogățesc și se dezvoltă mereu.

Evoluția tehnicii a însemnat și perfecționarea mijloacelor de observare a fenomenelor fizice și de măsurare a mărimilor corespunzătoare. Legile fizicii, exprimînd relațiile dintre mărimile fizice la un nivel tot mai înalt de precizie, folosesc drept cea mai potrivită limbă : matematica.

Mileniile de dezvoltare a științei despre numere, despre forme geometrice, despre operații cu numere au dus la acea știință care pare că se poate satisface pe sine descoperind legile unor forme desprinse de realitate. Cea mai bună dovadă a corespondenței dintre matematică și realitatea din care s-a născut este modul în care ea răspunde cerințelor fizicii. Pentru a exprima variațiile complicate ale mărimilor reale, fizicianul trebuie să apeleze la instrumente matematice tot mai subtile. Și dacă folosește un instrument potrivit, atunci el găsește chiar în formula matematică sugestii noi. Adeseori relația matematică folosită de fizician pare a-i spune : „Caută bine ; nu se poate să nu-l găsești și pe h. *El apare în formulă, deci trebuie să existe și în realitate".*

Este ca și cum matematica ar fi pregătit expresia legilor ce urmează să fie descoperite de fizicieni. Aceasta se explică tocmai prin indisolubila legătură a noțiunilor matematice și a legilor operațiilor matematice cu realitatea care a determinat apariția lor, prin legătura dintre gîndirea omenească și realitatea obiectivă pe care gîndirea o reflectă.

Evident că fizica nu se poate reduce la exerciții matematice pe teme de fizică. Obiectul fizicii îl formează cele mai generale forme de mișcare ale materiei (mecanice, termice, electromagnetice etc.). Descoperirea legilor acestor forme ale mișcării este conținutul evoluției fizicii.

Fizica contemporană, relativistă și cuantică, ne dă un tablou închegat al fenomenelor naturii, mai clar și mai apropiat de esența realității decît toate descrierile anterioare. Principii de valabilitate largă, acoperind domenii întinse de fenomene, de la cele din microcosm și pînă la cele din macrocosm, orientează cercetările fizicienilor.

Aceste principii se confruntă cu concepțiile despre lume, verificînd și confirmînd materialismul dialectic, singura concepție filozofică conformă cu realitatea.

Așadar, pe de o parte, fizica se găsește în mijlocul nostru prin creațiile tehnice bazate pe ea, pe de altă parte, ea îmbogățește și adîncește imaginea omului despre lume.

* * *

Progresele fizicii actuale justifică eforturile echipelor de savanți din lumea întreagă îndreptate spre cercetările fundamentale și de fizică aplicată. Ipotezele și teoriile elaborate își găsesc uneori confirmarea în răstimp de cîțiva ani, iar aplicațiile practice urmează îndeaproape rezultatele cercetărilor teoretice. Fenomene noi se dezvăluie în cadrul cercetărilor efectuate cu mijloacele actuale ale

marilor laboratoare de fizică, iar observarea acestor fenomene impulsionează dezvoltarea teoriei şi a metodelor de investigaţie a naturii.

Cîteva exemple culese din fizica ultimelor decenii şi a ultimilor ani pot sugera trăsăturile caracteristice ale desfăşurării muncii creatoare a fizicienilor ; ele concretizează legătura dintre practica experimentală şi teorie.

În anul 1934 se cerceta, în laboratorul lui I. S. Vavilov, luminiscenţa soluţiilor unor săruri de uraniu. Cerenkov observă, cu acest prilej, că în orice lichid transparent iradiat cu raze gamma apare o slabă luminiscenţă. Observaţiile s-au repetat în cele mai diferite condiţii. Vavilov ajunge la următoarea concluzie : sursa radiaţiei observată de Cerenkov o alcătuiesc electroni liberi, formaţi sub efectul razelor gamma.

Cîţiva ani mai tîrziu, I. M. Frank şi I. E. Tamm tratează teoretic problema şi ajung la ipoteza unei radiaţii a electronilor care se mişcă uniform în mediul respectiv cu o viteză mai mare decît viteza luminii în acel mediu. Frank ne ralizează interpretarea fenomenului Cerenkov pentru orice particulă încărcată.

Mijloace noi de amplificare a curenţilor fotoelectrici au îngăduit utilizarea efectului Vavilov-Cerenkov la rezolvarea unor probleme fundamentale legate de cercetarea particulelor elementare. S-au realizat astfel contoarele Cerenkov. Cu ele se poate determina — pe baza radiaţiei Cerenkov a particulei — viteza ei în mediul respectiv, indiferent de masa ei. Or, aceasta este o caracteristică esenţială pentru identificarea particulelor subatomice.

Astăzi, efectul Vavilov-Cerenkov oferă interesante posibilităţi de studiu a jerbelor atmosferice „largi" de raze cosmice.

În ultimii ani, A. E. Ciudakov propune utilizarea radiaţiei Vavilov-Cerenkov pentru construirea unui „integrator" special, în vederea determinării energiei totale transportate de fluxurile de jerbe. Această aplicaţie ar putea fi esenţială pentru rezolvarea problemelor fizicii particulelor de energii „supraînalte".

În anul 1944, D. D. Ivanenko şi I. I. Pomeranciuk prevăd, pe baze teoretice, fenomenul cunoscut sub numele de „electronul luminos". Prin acest fenomen se înţelege radiaţia luminoasă vizibilă emisă de electronii care descriu în acceleratorii de electroni traiectorii circulare, cu viteze apropiate de viteza luminii.

În 1947, Pollock observă, cu ochiul liber şi la lumina zilei, o radiaţie strălucitoare sub forma unei pete roşii, la o energie de 30 megaelectronvolţi, şi sub forma unei pete albastre, la o energie de 70 megaelectronvolţi. Cu aceasta se realizează, pentru prima oară în istoria fizicii, posibilitatea de „a vedea" electronul. D. D. Ivanenko şi A. A. Sokolov trec la tratarea teoretică a problemei şi la explicaţia matematică a fenomenului. Se trag concluzii de importanţă fundamentală, atît teoretice, cît şi practice. Se stabilesc limitele

creşterii energiei electronilor în accelerator, limite dincolo de care energia consumată pentru accelerare s-ar pierde cu totul prin radiere.

Electronul — infimul, dar inepuizabilul electron — îşi dezvăluie astfel însuşiri necunoscute.

Pe baza unor ipoteze şi consideraţii teoretice ale lui A. Einstein şi P. Ehrenfest comunicate în anul 1922, elaborate la rîndul lor ca urmare a unor interesante experienţe asupra cuantificării spaţiale, executate de alţi cercetători, E. K. Zavoiski descoperă, în anul 1944, la Kazan, rezonanţa paramagnetică. Acest fenomen, legat de proprietăţile magnetice ale particulelor ce alcătuiesc substanţele, a deschis perspective noi pentru studiul cristalelor ionice, a soluţiilor de electroliţi, a metalelor, a semiconductorilor şi, în sfîrşit, a radicalilor liberi cu existenţă efemeră în cursul reacţiilor chimice. Numeroasele cercetări teoretice şi experimentale efectuate din anul 1944 şi pînă azi au făcut accesibile experienţei însuşiri ale unor substanţe cunoscute doar teoretic pînă acum şi au dus, în acelaşi timp, la aplicaţii practice, ca, de pildă, măsurarea cu mare precizie a cîmpurilor magnetice, măsurări radioastronomice, posibilitatea construirii unor generatoare de oscilaţii de lungimi de undă foarte mici, a unor transformatori de frecvenţă de mare sensibilitate şi cu surse proprii de perturbaţii foarte mici. S-a creat, în sfîrşit, pe baza acestor cercetări, o nouă ramură a spectrochimiei şi, prin aceasta, o metodă de mare fineţe pentru analiza chimică.

Acum vreo zece ani s-a emis ideea folosirii unui generator molecular de frecvenţă. Pe această bază s-au realizat aşa-numitele orologii atomice. Unul dintre aceste orologii se bazează pe proprietatea atomului de azot din molecula de amoniac de a oscila de o parte şi de alta a planului format de atomii de hidrogen din molecula amoniacului. Fenomenul acesta se petrece cu o frecvenţă atît de constantă, încît pe baza lui se poate realiza măsurarea timpului pînă la o precizie care atinge a miliarda parte din secundă. Este vorba, deci, de un „orologiu", în care rolul pendulului îl îndeplineşte atomul de azot din molecula de amoniac, care interacţionează cu „cuantele radiaţiei radio". Asemenea orologii sînt construite atît în U.R.S.S cît şi în S.U.A. Ele se folosesc pentru a verifica unele concluzii ale teoriei relativităţii generale şi pentru a determina abaterile aştrilor de la regularitatea mersului lor. Pînă acum, etalonul de timp era mişcarea aştrilor ; ceasul atomic inversează lucrurile. Obişnuiţi cu marile înfăptuiri ale fizicii actuale, lucrul poate să ni se pară banal. Dar nu trebuie să uităm că este vorba despre folosirea practică a unei însuşiri (vibraţia atomului de azot în molecula de amoniac), care pînă nu demult reprezenta doar o ipoteză curajoasă, a cărei valabilitate părea imposibil să fie demonstrată experimental.

*În 1940, G. N. Flerov şi K. A. Petr*ac au descoperit fisiunea spontană a uraniului şi, deci, existenţa în scoarţa terestră a unei surse de neutroni.*

Aplicațiile acestei descoperiri pentru cercetările geologice și de astrofizică sînt imediate. Cercetătorii sovietici merg în acest domeniu pe linia indicată de V. I. Vernadski: „... Trebuie să găsim și să cunoaștem radiochimia planetei... Aici este, probabil, cheia pentru rezolvarea multor probleme geologice fundamentale"[1].

În 1950, A. G. Saharov și I. E. Tamm propun, pe baza cercetărilor lor teoretice, ideea folosirii forțelor magnetice ca barieră invizibilă și impenetrabilă pentru particulele de plasmă[2], *ridicate la o temperatură comparabilă cu aceea din centrul soarelui, în vederea utilizării în laborator a reacțiilor nucleare pentru nevoile energetice, adică, pentru conducerea dirijată a reacțiilor nucleare, care să se desfășoare lent, la comanda omului, în opoziție cu desfășurarea distructivă și de nestăpînit a monstruoaselor explozii ale bombelor cu hidrogen. O echipă de fizicieni și ingineri sovietici au pornit lucrările experimentale pe această bază, descoperind, în cursul acestor experiențe, fenomene noi de mare importanță pentru fizica descărcărilor în gaze și pentru problemele de astrofizică.*

La sfîrșitul anului 1958, I. V. Kurciatov, L. A. Artimovici și alții pot raporta observarea neutronilor în plasma conținînd hidrogen. Sînt surprinse astfel primele semne ale unei victorii viitoare.

În octombrie 1956. tinerii savanți chinezi T. D. Li și C. N. Yan atacă misterul dezintegrării mezonilor K. Ei emit, cu acest prilej, ipoteza că în cazul fenomenelor nucleare caracterizate prin prezența particulei neutrin (particulă fără sarcină electrică și cu o masă practic egală cu 0), nu mai este valabil principiul simetriei consacrat în fizică sub numele de conservarea parității. Ei propun verificarea experimentală a ipotezei lor prin cercetarea emisiei electronilor din nucleul de cobalt radioactiv Co^{60}. În anul 1957, profesoara C. H. Wu efectuează experiența de verificare, lucrînd în apropierea temperaturii de 0 absolut (acolo unde mișcările dezordonate dispar) sub acțiunea unor puternice cîmpuri magnetice. Se dovedește că ipoteza tinerilor savanți este valabilă. Emisia electronilor este orientată asimetric. Principiul conservării parității nu-și menține valabilitatea generală.

Cercetătorul sovietic Abraham Alihanov refăce experiența și confirmă rezultatele. Astfel se fundamentează experimental, într-un răstimp uluitor de scurt, una din cele mai interesante și subtile ipoteze cu privire la fenomenele din microcosm.

În toamna anului 1955 se descoperă, în laboratoarele de fizică din California, antiprotinii, particule de aceeași masă cu protinii, dar de sarcină

[1] Citat după A. K. Lavruhina, *Reacții nucleare în natură*, „Analele romîno-sovietice", Seria Matematică-Fizică, nr. 1|1958, p. 83.

[2] Amestec de atomi ionizați și particule elementare, la o „temperatură" de ordinul milioanelor de grade Celsius.

negativă; în 1956 se descoperă antineutronii, deosebiți de neutroni prin semnul cîmpului lor magnetic. Se deschide astfel perspectiva sintezei unor materiale cu proprietăți nebănuite astăzi.

În ultimii ani au fost sintetizate elemente noi, inexistente în natură, sau existente în cantități infime. Rînd pe rînd s-au născut elementele cu numerele de ordine 95 pînă la 102, prelungind astfel seria elementelor dincolo de limitele celebrului tabel al lui Mendeleev.

Fizicienii atacă problema constituției materiei; construiesc elemente noi; studiază fizica astrelor; păşesc cu îndrăzneală, folosind puternicele mijloace tehnice actuale, pe căile cuceririi cunoaşterii.

Cu ajutorul unor dispozitive, cum este sincrofazotronul (elaborat sub conducerea ştiințifică a lui V. I. Veksler), în care se accelerează particule încărcate pînă la energii de 10 miliarde electronvolți, cercetători a 12 state lucrează în comun, în cadrul Institutului unificat de cercetări nucleare (I.U.C.N.) de la Dubno, la lămurirea celor mai pasionante probleme ale fizicii nucleare. Cercetători romîni lucrează şi ei în această „linie întîi" a frontului fizicii.

Proiectarea şi elaborarea unor acceleratoare mai puternice, de 50—60 miliarde electronvolți, sînt în curs în U.R.S.S.

Fizica modernă este în plină desfăşurare.

Institutul de fizică P. N. Lebedev al Academiei de Ştiințe a U.R.S.S., institutele sovietice unionale, institutul nostru de fizică atomică, alături de alte centre de cercetare din lumea întreagă „produc" în mod organizat cunoştințe noi despre lumea materială nesfîrşită şi dau tehnicii baza ei ştiințifică.

* * *

În țările socialismului, munca fizicienilor face parte integrantă din activitatea planificată de transformare a lumii. Ştiința este aliatul socialismului.

La Congresul al XXI-lea al P.C.U.S. s-au indicat principalele direcții ale cercetărilor fizico-matematice, menite să sprijine realizarea grandiosului plan septenal şi să deschidă perspectivele tehnicii viitorului. În documentele congresului se vorbeşte despre fizica nucleară, fizica solidului, a temperaturilor joase, fizica semiconductorilor, radiotehnica şi electrotehnica. Chiar numai faptul că asemenea probleme îşi găsesc locul în discuțiile congresului dovedeşte importanța pe care partidul constructorilor comunismului o acordă acțiunii transformatoare a fizicii actuale.

Pentru construcția celor 1 300 de linii automatizate prevăzute în planul septenal, fizicienii sovietici elaborează maşini de calculat electronice, destinate să conducă prompt, egal şi fără greşeală — pe baza unui program complicat — mişcarea unor instalații industriale uriaşe sau să efectueze tot atît de egal,

rapid și imposibil operații statistice, calcule matematice, lucrări de documentare sau traducere, care ar cere ca sute de tehnicieni să lucreze fără răgaz ani de-a rîndul.

În laboratoare specializate, fizicienii sovietici atacă cele mai importante probleme ale fizicii teoretice și aplicate. Uriașe telescoape se îndreaptă spre galaxii îndepărtate. Contoare de particule de sensibilitate neîntrecută sînt purtate la zeci de kilometri înălțime pentru a culege informații despre jerbele de raze cosmice.

Se proiectează materiale noi cu însușiri remarcabile.

Specialiști în optică fizică, radioastronomie, fizică nucleară, fizica solidului, electronică, automatică, folosind cuceririle școlilor de matematicieni sovietici — pioniere mondiale în cele mai noi domenii — și pe baza materială pusă la dispoziție de statul sovietic îmbogățesc în fiecare an, în fiecare lună, știința constructorilor comunismului.

Robert E. Marshak și Robert R. Wilson, doi dintre fizicienii americani invitați la congresul de fizică a particulelor cu energii mari, care s-a ținut la Moscova în 1956, și-au exprimat direct admirația pentru posibilitățile materiale, efortul creator, talentul și pasiunea cercetătorilor sovietici.

La conferința oamenilor de știință din lumea întreagă de la Geneva pentru folosirea energiei nucleare în scopuri pașnice, savanții apuseni au aplaudat referatele prin care lucrătorii științifici ai țărilor socialismului înfățișau stadiul lucrărilor închinate luptei pentru cunoaștere, pentru depășirea condiției umane actuale.

Puterea creatoare a fizicienilor sovietici s-a dovedit în toată plenitudinea ei cu prilejul lucrărilor de colaborare internațională în cadrul A.G.I. (Anul Geofizic Internațional 1957—1958), cînd 40 de state au lucrat laolaltă pe plan cosmic, atacînd în mod organizat probleme ale fizicii contemporane.

Sputnicii și rachetele cosmice sovietice au demonstrat lumii întregi nivelul neîntrecut atins de știința constructorilor comunismului.

Sprijinul științei sovietice s-a făcut puternic simțit în țara noastră, care-și aduce astăzi aportul la dezvoltarea științei mondiale.

Fizicienii romîni atacă problemele fundamentale ale fizicii moderne și, în același timp, își aduc contribuția la rezolvarea nevoilor imediate ale industriei și agriculturii științifice. La reactorul nuclear și la ciclotron se urmăresc proprietățile particulelor constituente ale nucleului și, în același timp, se prepară izotopii radioactivi, care folosesc la cercetările de biologie, de chimie, în prospectarea petrolieră și în medicină. „Marcarea" atomilor se practică astăzi de cercetători și tehnicieni romîni cu izotopi produși în reactorul romînesc.

Continuînd tradiția științifică a matematicii și fizicii romînești, cercetătorii din R.P.R. abordează problemele teoretice legate de fizica nucleului

atomic, de reacțiile nucleare, de fizica solidului. Ei imaginează experiențe subtile pentru a descifra însușirile încă necunoscute ale particulelor de materie.

Este suficient să amintim, în această privință, experiențele recente executate de academicienii Horia Hulubei, Șerban Țițeica și colaboratorii lor, pentru a dovedi existența spinului la mezonii π (particule cu masa de 300 de ori mai mare decît masa electronului, cu o durată de existență egală cu a suta milioana fracțiune dintr-o secundă și cărora nu li se atribuie spin).

Fizicienii din R.P.R. tratează problemele de la limita dintre fizică și filozofie, cum sînt: cauzalitatea în fizica cuantică; spațiul și timpul, masa și energia în fizica relativistă și cuantică; dar, în același timp, se preocupă și de rezolvarea problemelor practice puse de construcția socialismului. Ei aplică spectroscopia, ultraacustica, defectoscopia gamma la problemele puse de metalurgie. Ei urmăresc și realizează corpi cu însușiri noi, necesari dezvoltării electrotehnicii și electronicii. Construiesc mașini de calculat analogice și digitale și tratează teoretic și aplicativ problemele automatizării. Constructorii de mari hale industriale și săli de spectacole îi consultă în probleme de acustică.

Cunoscută și recunoscută pe plan mondial, școala românească de matematică, condusă de academicianul Moisil, sprijină eforturile fizicienilor noștri îndreptate spre descifrarea necunoscutelor în domeniul fenomenelor fizice și elaborează bazele teoretice ale automatizării.

În societatea fără exploatare pe care o construim, știința își dă mîna cu producția, și ele se accelerează reciproc.

* * *

Problemele generale ale fizicii pot fi privite din diferite puncte de vedere. Se poate, de pildă, încerca stabilirea — pe bază de exemple concrete — a raportului dintre fizică și tehnică, dintre cercetarea fizică și forțele și relațiile de producție; este deosebit de interesantă relația dintre concepția despre lume a cercetătorului și succesul lucrărilor sale teoretice și experimentale; și, la fel, analiza modului în care servanții ideologiilor reacționare încearcă să folosească rezultatele fizicii actuale pentru a fundamenta idealismul și fideismul, consecință inevitabilă a concepțiilor idealiste. Modul în care teoria orientează practica experimentală și felul în care practica determină orientarea teoriei, rolul întîmplării în observarea fenomenelor naturale, raporturile dintre cercetarea matematică și fizică, toate aceste aspecte ale procesului de acumulare a cunoștințelor sînt instructive atît pentru specialist, cît și pentru cel dinafara specialității.

Autorul lucrării „Fizica trăită", profesor de matematică, tratează problemele fizicii din punctul de vedere al raportului lor cu matematica. El se adre-

seazâ nespecialiştilor, încercînd să-i apropie de problemele fizicii moderne şi, în special, de înţelegerea rolului pe care instrumentul matematic îl are în descrierea fenomenelor fizice. Autorul nu-şi propune să discute, pe plan filozofic, legătura dintre abstracţiunile matematice şi conceptele fizice, problemă dezbătută cu genială profunzime de Fr. Engels în „Dialectica naturii" (Asupra prototipurilor infinitului matematic în lumea reală, p. 248). Autorul nu-şi propune să urmărească strict evoluţia istorică a fizicii. El foloseşte exemple din istoria evoluţiei ideilor în fizică numai pentru a ilustra procesul de naştere a noţiunilor fizice din observarea directă a realităţii, procesul de abstractizare a conceptelor primare, de trecere la formulare matematică şi de previziune ştiinţifică pe baza teoriei formulate cantitativ. De aceea, lipsesc din referirile autorului nume de savanţi, teoreticieni şi mari experimentatori, ale căror descoperiri stau la baza cercetărilor actuale în fizică.

În general, autorul încearcă să facă intuitivă expunerea sa. Poate că unele noţiuni ar fi trebuit exemplificate şi lămurite mai îndeaproape şi ca structură, şi ca raport cu fizica (de pildă operatorii comutativi şi necomutativi sau noţiunile de teorie a mulţimilor).

Revoluţia culturală din ţara noastră a determinat existenţa unei mase largi de cititori, pentru care deducerea unor formule elementare ca aceea a sumei progresiilor geometrice sau a rădăcinilor unei ecuaţii de gradul II, sau chiar a formulelor de derivare, nu reprezintă dificultăţi de netrecut. Zeci de mii de muncitori şi tehnicieni urmează cursuri tehnice şi şcoli de specializare. Literatura de popularizare a contribuit, fără îndoială, la lichidarea spaimei de matematică, alimentată în trecut. Pentru aceştia, cartea va aduce îndemnul şi unele portiţe de intrare către matematica superioară folosită în fizică.

Oricum, o carte de ştiinţă modernă — şi chiar de popularizare a ştiinţei — nu se poate citi ca un roman, aşa cum spune Einstein despre propria sa carte de popularizare „Evoluţia fizicii".

Unele dificultăţi din partea finală a lucrării vor stimula poate pe cititori să caute şi în alte lucrări lămurirea şi adîncirea noţiunilor tratate.

Unele păreri personale expuse de autor în paginile cărţii sale (ca, de pildă, definiţia ştiinţei sau interpretarea cauzelor înfrîngerii teoriei lui Huyghens etc.) sînt susceptibile de interpretări şi discuţii. Multe din aceste păreri pot fi confruntate cu materialele publicate în revistele noastre de popularizare şi specialitate. Astfel, de pildă, este indicată cercetarea materialelor publicate în „Analele Romîno-Sovietice", Seria Matematică-Fizică din cadrul rubricii „Pentru o orientare materialist-dialectică în ştiinţă". În această rubrică, în numărul 4/1957 şi cele din 1958, fizicienii romîni Şerban Ţiţeica, Valeriu Novacu, T. T. Vescan, Remus Răduleţ şi alţii discută problema determinismului în fizica actuală.

Orice carte care se ocupă de problemele fizicii, fie una ca cea de față (privită din punctul de vedere al matematicii fizice), fie una de istorie a fizicii, fie una destinată unui capitol special din fizică, concretizează ideea cognoscibilității lumii și a forțelor umane care conduc la cunoașterea naturii.

„Cerul nu mai ascunde minuni, ci numai probleme", spune autorul. Matematica creată de-a lungul mileniilor, în strînsă legătură cu producția, operînd cu o logică născută și ea din observarea milenară a transformărilor din natură, este nu numai un mijloc admirabil pentru exprimarea variațiilor mărimilor fizice, ci și o mare educatoare a capacității individuale de gîndire.

Cu fiecare pas în depășirea greutăților, inerente începutului, se deschide o nouă perspectivă. Limba oamenilor de știință îți devine tot mai clară, pînă ajunge la posibilitatea de a judeca valoarea și sensul marilor descoperiri. Și mai sus, pînă la însușirea metodelor gîndirilor științifice și a expunerilor corespunzătoare.

FIZICA TRĂITĂ

Interesul pentru științele naturii nu trebuie să se limiteze numai la cunoașterea rezultatelor cercetărilor din acest domeniu. Tot atît de interesante sînt și căile care duc la aceste rezultate, deoarece ele pot constitui puncte de plecare pentru noi cercetări fructuoase. Acest lucru nu este posibil dacă se cunosc numai legile definitiv stabilite, care pot fi uneori interpretate greșit.

Noi vom proceda altfel. Lucrarea noastră pornește de la întîmplări curente, explică și lărgește interpretarea lor, pentru ca, la sfîrșit, să dezvăluie natura matematicii și fizicii. Am fost preocupați mai mult de a scoate în evidență ideile călăuzitoare, decît de a cuprinde întregul material. În felul acesta se poate obține imaginea evoluției științelor naturii.

Numai o astfel de imagine dă posibilitatea de a înțelege adevărata esență a științelor naturii. Cercetătorul care se adîncește în specialitatea sa posedă o astfel de imagine — adeseori numai a unui fragment din întreaga imagine — ale cărei culori îl entuziasmează, fără a fi în stare însă să poată să facă pe cei din jur să priceapă ceea ce lui îi produce o bucurie atît de mare. Fie ca cititorul acestei cărți să ia parte la această bucurie!

Dacă această carte poate apare într-o nouă ediție îmbunătățită, aceasta se datorește inițiativei editurii academice Geest și Portig.

Grifswald, decembrie 1955

AUTORUL

PE DRUMUL DESCOPERIRILOR

Natura este o carte
în care trebuie să învățăm să citim

Dominaţia omului asupra naturii creşte pe măsură ce sfera cunoştinţelor lui se lărgeşte. Dar o simplă acumulare de cunoştinţe, oricît ar fi ele de valoroase, devine inutilă şi nu ne-ar da o privire de ansamblu, dacă materialul adunat n-ar fi clasificat în mod logic. Ştiinţa are rolul de a dezvolta noţiuni corespunzătoare şi în acest sens răspunsul la întrebarea ce este ştiinţa, poate fi următorul : aflarea de cunoştinţe ce pot fi puse în practică.

Noţiunile ştiinţifice — forma în care se toarnă materia primă constituită din datele adunate pe baza experienţei pentru a deveni o operă frumoasă şi concretă — sînt adaptate nivelului nostru actual de experienţă. În decursul timpului, pe măsură ce cunoştinţele noastre au evoluat, unele noţiuni s-au dovedit a fi puţin cuprinzătoare şi au trebuit să fie completate sau înlocuite cu altele mai cuprinzătoare. O privire asupra istoriei ştiinţelor naturii confirmă această afirmaţie ; în acest scop vom reda următorul exemplu.

În insula Delos din Grecia se găsea odinioară un altar de formă cubică şi „zeii" cereau construirea unui alt altar, tot de formă cubică, însă exact de două ori mai mare. Printr-un cub mai mare, înţelegem un cub cu un volum de două ori mai mare. Întrebarea care se punea atunci era cum putea fi găsită lungimea laturii acestui cub. Astăzi, acest lucru nu prezintă nici o dificultate, deoarece ştim să extragem rădăcina unui număr şi în cazul de faţă, lungimea laturii cubului este rădăcina cubică a volumului altarului. Grecii, însă, cunoşteau numai numerele întregi şi fracţiile, cu ajutorul cărora nu se putea calcula lungimea căutată a laturii cubului. Astfel, aritmetica lor a dat greş în faţa vestitei probleme de la Delos ; abia noţiunea generală de număr pe care o avem azi ne permite rezolvarea acestei probleme.

Rolul noţiunilor nu se mărgineşte numai în a clasifica materialul ştiinţific; adesea ele dezvăluie legături nebănuite între diverse fapte. Să ne gîndim numai la mişcarea corpurilor cereşti. Încă din antichitate se observase că planetele se mişcă pe cer şi de pe atunci oamenii s-au străduit să lămurească mişcările lor şi să le calculeze orbitele. Însă, abia după mai mulţi ani de trudă *Kepler* a reuşit să stabilească, cu ajutorul observaţiilor exacte ale lui *Tycho Brahé*, vestitele sale trei legi după care se face mişcarea planetelor. A fost necesară întreaga agerime a unui geniu matematic de talia lui *Kepler*, pentru a se putea desprinde aceste legi din noianul de material acumulat pe baza observaţiilor făcute în cursul veacurilor.

Dacă se cunoaşte însă legea atracţiei universale descoperită de *Newton*, lege după care corpurile cereşti se atrag între ele, atunci deducerea celor trei legi ale lui *Kepler* este o problemă de cîteva minute. Ceva mai mult, în felul acesta se obţine un punct de vedere nou, superior, şi anume că *Newton*, prin descoperirea legii atracţiei universale, a explicat concluziile lui *Kepler*.

Trebuie să mai observăm că şi valabilitatea observaţiilor este relativă, aceasta fiind condiţionată în mare măsură de nivelul tehnicii măsurătorilor. Experienţe noi, mai multă îndemînare în efectuarea experienţelor, o precizie mai mare duc la înmulţirea şi îmbunătăţirea observaţiilor, silindu-ne deseori să căutăm o nouă interpretare anumitor fapte. Astfel, noţiunea de masă a rămas valabilă secole întregi în aceeaşi formă; masa unui corp era socotită ca o mărime constantă, care nu se putea modifica prin nici un proces fizic. Au fost necesare cunoştinţe privitoare la electronii rapizi, pentru a constata că noţiunea iniţială de masă trebuie îmbunătăţită.

Astăzi se ştie că masa unui corp poate fi considerată constantă numai la viteze reduse, creşterea masei devenind apreciabilă o dată cu creşterea vitezei. Aşadar, teoriile noi, înlocuiesc pe cele vechi. Cucerim mereu noi domenii ale naturii, şi cînd natura ne întinde curse şi pare să dezmintă cunoştinţele noastre, scăpăm din impas renunţînd la vechea teorie în favoarea alteia noi, la fel ca şarpele care îşi schimbă pielea atunci cînd aceasta i-a devenit prea strîmtă.

În acest spirit trebuie interpretat proverbul care spune : „Fii înţelept ca şarpele".

După cum s-a dovedit întotdeauna, cunoştinţele experimentale nu rămîn în afara progresului, iar progresul lor cer înlocuirea teoriilor învechite. Raportul între teorie şi experienţă este privit, de obicei, în sensul că teoria trebuie să explice experienţele. Pe de altă parte însă, observaţiile ne permit să constatăm cît de apropiată este teoria de viaţă. Menirea teoriei este de a sistematiza materialul adunat prin experienţă şi de a-i da forma necesară aplicării lui practice.

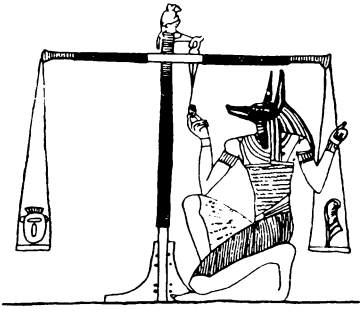


Fig. 1.

Cum s-a ajuns la stabilirea teoriilor ? Pentru a răspunde la această întrebare fundamentală nu este neapărat necesar să facem un studiu sistematic al istoriei ştiinţelor naturii, ci este suficient să luăm cîteva exemple. De pildă, balanţa care este necesară atît negustorului şi gospodinei, cît şi cercetătorului, există de foarte mult timp, ea fiind mai veche chiar decît roata carului care simbolizează începutul tehnicii noastre rutiere. După cum rezultă din inscripţiile arheologice, balanţa era folosită de vechii egipteni (fig. 1).

Să introducem aci o mică problemă : cu o *balanţă* cu braţele egale trebuie cîntărit exact un corp cu masa de 121 g. Cîte greutăţi marca'e sînt necesare pentru cîntărirea acestei mase şi ce valori trebuie să aibă aceste greutăţi ? Constatăm că pentru aceasta sînt suficiente greutăţi de 1, 3, 9, 27 şi 81 g. De exemplu, pentru cîntărirea unui corp cu masa de 73 g, se adaugă pe talerul unde se află corpul de cîntărit o greutate de 9 g, iar pe celălalt taler, greutăţile de 1 şi 81 g.

Pentru fizicieni, balanţa nu este numai un obiect de uz practic, ci şi o maşină simplă, o pîrghie, ale cărei legi trebuie cercetate. Se ştie că la balanţă important este raportul dintre lungimile braţelor. Astfel, la balanţa zecimală, braţul mai lung se încarcă cu greutăţi de zece ori mai

mici, deoarece este de zece ori mai lung decît celălalt braţ, care poartă corpul ce se cîntăreşte. Fizicianul nu se mulţumeşte cu faptul că regula se confirmă, ci cercetează şi „de ce" se confirmă.

Cercetătorul îşi pune în permanenţă întrebarea „de ce" şi întrebarea este îndreptăţită, deoarece chiar şi o mie de experienţe izolate nu pot garanta că a o mie şi una experienţă va confirma pe celelalte. Numai dacă se cunosc cauzele care determină fenomenul se poate şti ce trebuie să se întîmple; aceste cauze formează răspunsul la întrebarea „de ce".

Cu alte cuvinte, să presupunem că cercetătorul vrea să formuleze o teorie a pîrghiilor. În acest caz se poate întîmpla ca toate noţiunile să existe şi cercetătorul să le poată folosi aşa după cum un traducător utilizează o limbă străină. Un cunoscător poate exprima cu uşurinţă legea pîrghiilor folosind limbajul mecanicii. Această limbă însă ne este încă străină şi, de aceea, încercăm un raţionament care ne va da mai întîi posibilitatea de a înţelege cîteva fragmente ale acestui limbaj. Dacă atîrnăm, de exemplu, la gradaţia 8 o riglă lungă de 16 cm (gradată în centimetri) şi care cîntăreşte 16 g, aceasta atîrnă în poziţie orizontală: rigla este în echilibru (fig. 2). Evident că lucrurile se petrec la fel dacă ne închipuim rigla formată din două părţi: una de 6 cm şi alta de 10 cm.

Se ştie însă că este indiferent dacă un corp se sprijină pe întreaga lui lungime sau numai în centrul său de greutate; în ambele cazuri, corpul acţionează în mod egal şi cu întreaga sa greutate asupra suportului. Să aplicăm această proprietate asupra celor două părţi ale riglei de care am vorbit mai sus. Centrul de greutate al riglei de 6 cm este la gradaţia 3, deci la o depărtare de 5 cm faţă de punctul de sprijin al riglei întregi (punctul 8). Conform celor spuse mai înainte, această porţiune a riglei se poate înlocui printr-o greutate de 6 g, atîrnată în dreptul gradaţiei 3. În mod asemănător, se poate înlocui şi cealaltă porţiune a riglei printr-o greutate de 10 g, care să acţioneze în dreptul gradaţiei 11.

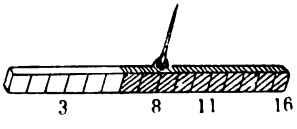


Fig. 2.

Ambele greutăţi atîrnate de pîrghie se găsesc în raport de 6 : 10 sau 3 : 5, în timp ce centrele de greutate ale celor două porţiuni ale riglei se găsesc la o depărtare de 5, respectiv 3 cm, de mijlocul riglei, rezultînd astfel nişte „braţe" într-un raport de 5 : 3. Astfel, se constată că, în cazul echilibrului, greutăţile de pe pîrghie sînt invers proporţionale cu lungimea braţelor : cu cît braţul este mai scurt, cu atît greutatea trebuie să fie mai mare.

În cele de mai sus s-a dedus, de fapt, legea pîrghiilor, însă numai pe baza unei ipoteze privitoare la comportarea centrului de greutate. Această ipoteză trebuie să conţină legea pîrghiilor, căci altfel nu ar fi putut fi dedusă din ipoteza dată. Ceea ce am realizat constă în faptul că am confirmat o lege, un fenomen din fizică, cu ajutorul altei legi. Reprezintă oare aceasta un avantaj? Fără îndoială, deoarece este întotdeauna important ca o lege să se bazeze pe o altă lege, mai simplă sau mai uşor de înţeles, ceea ce într-adevăr s-a întîmplat în cazul de faţă.

Evident că nu ne oprim aci, ci tindem întotdeauna să introducem noţiuni noi, mai largi, care să cuprindă în cele din urmă şi legea pîrghiilor ca un caz particular printre altele. La astfel de noţiuni largi s-a ajuns însă numai treptat. Să vedem acum ce noţiuni rezultă din legea pîrghiilor. Mai întîi, noţiunea de moment static. Am stabilit că greutăţile se găsesc într-un raport invers cu cel al lungimii braţelor, ceea ce se mai poate exprima şi în forma următoare :

Greutatea 1 × Braţul 1 = Greutatea 2 × Braţul 2, în cazul nostru :

$$6 \times 5 = 10 \times 3.$$

De aci, rezultă că în cazul pîrghiei nu hotărăşte numai greutatea sau numai lungimea braţului pîrghiei. Hotărîtor este produsul lor, care se introduce ca o noţiune nouă şi i se dă denumirea de „moment static".

Astfel, legea pîrghiilor poate fi exprimată şi în felul următor : o pîrghie este în echilibru atunci cînd cele două momente statice sînt egale. Prin aceasta însă se pare că nu s-a obţinut nimic nou, ci numai o formulare nouă a vechii legi a pîrghiilor. Cu toate acestea, noţiunea de „moment static" are o aplicaţie mult mai generală şi în

numeroase probleme de mecanică se dovedeşte deosebit de folositoare şi simplificatoare ; tocmai în aceasta constă justificarea existenţei multor noţiuni şi simplificări folosite în fizică.

Mai trebuie relevat şi un alt fapt. Mai înainte am vorbit despre centrul de greutate. Acesta poate fi uşor stabilit în cazul unei bare sau al unei sfere. Dacă vrem, însă, să stabilim centrul de greutate pentru un corp de formă neregulată, de exemplu pentru un copac, aceasta nu se mai poate face cu ajutorul matematicii elementare, ci trebuie utilizate noţiuni care fac parte din matematicile superioare. Deci matematicile superioare joacă un rol important chiar şi în viaţa de toate zilele, cu toate că acest lucru rămîne neobservat de majoritatea oamenilor.

Să considerăm că rigla de care s-a vorbit mai sus este făcută dintr-un material deformabil, de exemplu din aluminiu. Această riglă putem s-o laminăm pe partea ei lată, fără ca în starea de echilibru să intervină vreo modificare. După aceasta, să formăm din cele două dreptunghiuri corespunzătoare celor două segmente de 6 şi 10 cm ale riglei, două vergele care să ocupe poziţia diagonalelor celor două dreptunghiuri (fig. 3). Cele două centre de greutate rămîn neschimbate, deci starea de echilibru se menţine. După cum se vede, nu interesează nici distanţa dintre cele două centre de greutate faţă de punctul de rotaţie şi nici forma sau mărimea pîrghiei, ci numai distanţa dintre centrele de greutate faţă de axa medie — şi tocmai aceste distanţe sînt cuprinse în noţiunea de moment static. În felul acesta, momentul static se poate generaliza.

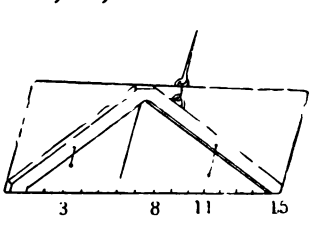


Fig. 3.

Se pare că *Leonardo da Vinci* întrezărise această stare de lucruri. Din păcate, el a păstrat pentru sine aceste constatări şi ele nu au putut fi cunoscute decît mult mai tîrziu, după ce notiţele sale au fost publicate, însă într-o epocă în care acestea fuseseră depăşite. De altfel legea pîrghiilor era cunoscută încă din antichitate, dar într-o formă mai puţin completă. Lui *Arhimede* i se atribuie afirmaţia îndrăz-

neaţă că dacă el ar fi avut un punct fix, ar fi putut mişca pămîntul din loc. Bineînţeles că în acest caz se omisese faptul că nici un material din care s-ar fi putut confecţiona pîrghia nu putea rezista la o asemenea solicitare. Chiar şi încercarea, incomparabil mai modestă, de a mişca un munte ar da greş, prin faptul că o pîrghie de lungime corespunzătoare s-ar rupe din cauza propriei sale greutăţi.

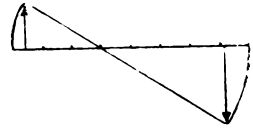


Fig. 4.

În expunerea noastră am pornit de la o riglă lungă de 16 cm, cîntărind 16 g şi am ajuns la o pîrghie avînd lungimea braţelor de 3 şi 5 cm şi greutăţi de 10 şi 6 g. Această pîrghie s-a dovedit a fi imaginea fizică a riglei de care am vorbit. Forma, materialul, înfăţişarea riglei sînt indiferente. Fizica nu copiază natura cu fidelitatea unui aparat fotografic, ci ea încearcă să prindă numai esenţialul, aşa cum pictorul scoate în evidenţă numai trăsăturile caracteristice ale unei figuri.

Pe lîngă momentul static, pîrghia ne permite să cunoaştem o nouă noţiune, care are o importanţă fundamentală pentru întreaga fizică şi anume noţiunea de lucru mecanic. Dacă rotim pîrghia scoţînd-o din poziţia orizontală, cele două greutăţi se deplasează: după cum se vede din figura 4, o greutate se ridică, iar cealaltă coboară. Din asemănarea celor două triunghiuri, rezultă că deplasările — măsurate pe verticală — se află în acelaşi raport ca şi braţele pîrghiei; în exemplul nostru, deplasările se găsesc în raportul de 3:5, deci în raport invers proporţional cu greutăţile respective. Aşa după cum am stabilit mai înainte că momentul static este produsul dintre greutate şi braţul pîrghiei, putem acum să formăm şi produsul dintre greutate şi deplasarea pe verticală a acesteia. În cazul echilibrului pîrghiei, ambele produse trebuie să fie de asemenea egale între ele.

Acest produs a căpătat o denumire specială : el se numeşte „lucru mecanic". Lucrul mecanic se consideră pozitiv atunci cînd o greutate se ridică şi negativ atunci cînd o greutate coboară[1]. În cadrul acestor constatări nu este greu să stabilim o analogie între teorie şi practică. Fiecare din noi

[1] Autorul german adoptă ca sens pozitiv pentru lucrul mecanic, sensul invers decît cel standardizat (*N. R.*)

ştim că pentru a ridica o greutate trebuie să depunem un efort şi că acest efort este cu atît mai mare, cu cît este mai mare greutatea şi înălţimea la care o ridicăm. Invers, dacă se lasă să cadă o greutate, se economiseşte efort. Acestea sînt fenomene contrare, din care cauză şi în ecuaţiile din fizică se notează cu semne contrare.

Cu ajutorul noţiunii de lucru mecanic putem exprima legea pîrghiilor într-o nouă formă. După cum am spus la rotirea pîrghiei, o greutate coboară în timp ce cealaltă se ridică. În starea de echilibru, ambele lucruri mecanice care se efectuează trebuie să fie egale şi contrare; de aci reiese faptul că lucrul mecanic total trebuie să fie nul.

Am afirmat că lucrul mecanic este o noţiune fundamentală. Într-adevăr, cu ajutorul acestei noţiuni s-a putut exprima legea pîrghiilor într-o formă deosebit de simplă şi de generală. Principiul „lucrul mecanic total trebuie se fie nul" este un principiu foarte simplu şi reprezintă o generalizare reală. Apare cu totul firesc ca domeniul său de aplicare să fie mult mai larg, deoarece nu conţine nici un fel de afirmaţii care s-ar limita numai la pîrghii. Aceasta ne conduce la ideea de a încerca o experienţă. Să vedem dacă nu cumva principiul „lucrul mecanic total trebuie să fie nul" nu este valabil pentru toate maşinile în stare de echilibru. Se va vedea că acest principiu permite stabilirea condiţiilor de echilibru în toate cazurile.

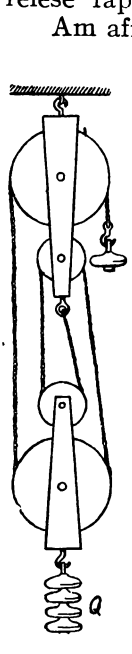


Fig. 5.

Să începem cu palanul. Pentru a porni de la ceva concret, să considerăm un palan compus din patru role (fig. 5). Ca urmare a modului în care este înfăşurat cablul pe palan, contragreutatea q coboară de patru ori mai mult decît se ridică greutatea Q. Să presupunem că greutatea Q s-a ridicat cu înălţimea H. Urmează că greutatea q a coborît cu 4 H. Lucrul mecanic efectuat pentru ridicarea greutăţii Q este deci $Q.H$, în timp ce lucrul mecanic efectuat la coborîrea contragreutăţii q este $-q.\ 4\ H$ (în acest caz lucrul mecanic este negativ, deoarece este vorba de coborîrea unei greutăţi). Conform ipotezei noastre, în starea de echilibru lucrul mecanic

total, deci suma ambelor lucruri mecanice (de coborîre a contragreutăţii q şi de ridicare a greutăţii Q), trebuie să fie zero. Deci vom stabili relaţia

$$Q.H - q.4H = 0,$$

din care rezultă că

$$q = \frac{1}{4} Q,$$

ceea ce înseamnă că în acest caz greutatea Q este echilibrată de o contragreutate de 4 ori mai mică. Evident că ceea ce se cîştigă ca greutate, respectiv forţă, se pierde ca timp, deoarece drumul $4H$, pe care trebuie să se deplaseze forţa q, devine de 4 ori mai mare.

Acest rezultat se poate obţine şi pe altă cale. Noţiuni cuprinzătoare ca aceea de lucru mecanic se pot obţine şi pe baza observaţiilor directe. Totuşi, acesta este un fenomen trecător, deoarece familiarizarea cu noile noţiuni ne face ca de la un timp să le considerăm ca evidente. Această situaţie o vom întîlni adesea şi se va preciza din ce în ce mai mult. Ea constituie premisa capacităţii de dezvoltare a gîndirii omeneşti.

Pentru a stabili direct condiţia de echilibru în cazul palanului de mai sus, este suficient să observăm că greutatea Q atîrnă de 4 cabluri, fiecare din ele suportînd deci o greutate de $^1/_4 Q$; aceasta înseamnă că contragreutatea q trebuie să echilibreze numai efectul de tracţiune al unui singur cablu, adică $q = {}^1/_4 Q$. Acest raţionament este cît se poate de simplu. El valorifică experienţele pe care le posedă fiecare din noi. Nimeni nu poate contesta că greutatea Q nu se repartizează uniform la toate cablurile scripetelui. Cu ajutorul unor raţionamente asemănătoare s-au obţinut în mod continuu cunoştinţe importante în decursul veacurilor. Atît timp cît este vorba de a cuceri domenii noi, nu se poate obiecta nimic unui astfel de procedeu. Abia cînd rezultatele obţinute au ajuns la gradul de a putea fi tratate separat a trebuit să fie introduse noţiuni mai cuprinzătoare, iar observaţiile ulterioare să fie făcute cu ajutorul lor. În cazul palanului am luat la început calea din urmă şi numai după aceea am luat calea pe care se ajunge în mod direct la stabilirea condiţiilor de echilibru, independent de alte consideraţii.

Palanul de care am vorbit are 4 role. Se pune întrebarea dacă nu cumva ar fi suficiente mai puține role pentru a se obține același rezultat. Într-adevăr, același rezultat se obține dacă se folosește un palan compus din 3 role, ca cel reprezentat în figura 6. Cu un astfel de palan poate fi întrecut chiar și baronul Münchausen, care, după cum se știe, s-a scos singur dintr-o mlaștină trăgîndu-se de păr. Fizicianului i se pare îndoielnică o asemenea scamatorie. Totuși, cineva se poate ridica cu ajutorul degetului său mic, însă servindu-se de un palan compus dintr-o jumătate de duzină de role. În acest caz este suficient să se poată ridica $\frac{1}{32}$ din greutatea proprie, lucru care se poate face ușor chiar numai cu degetul mic.

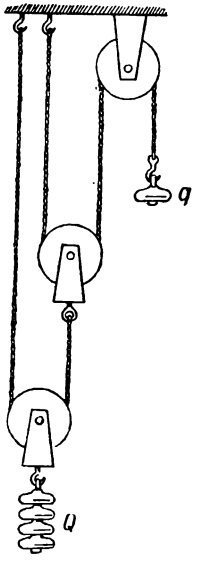


Fig. 6.

O mașină simplă este și planul înclinat (fig. 7). Pentru a stabili condiția de echilibru, să apelăm din nou la principiul: „lucrul mecanic total trebuie să fie nul". În timp ce contragreutatea q coboară pe distanța H, greutatea Q parcurge aparent același drum pe planul înclinat. În spiritul principiului amintit nu ne interesează acest drum, ci proiecția verticală a lui, care indică cu cît s-a ridicat greutatea Q. Înălțimea cu care se ridică greutatea este Hf, f fiind raportul între înălțimea a a planului înclinat și lungimea sa, c, deci $f = a : c$. Cu această formulă se poate calcula lucrul mecanic necesar deplasării greutăților. Lucrul mecanic al contragreutății q este $-q.H$, iar al greutății Q este $Q.H.f$. Suma celor două lucruri mecanice trebuie să fie zero, deoarece ea reprezintă lucrul mecanic total care se conservă. Deci se poate scrie :

$$Q.H.f - q.H = 0,$$

din care, după simplificare cu H, rezultă

$$q = Qf.$$

Atît la planul înclinat, cît și la palan se cîștigă forță, deoarece f este o fracție subunitară ; asta înseamnă că q este

mai mic decît Q ; această scădere de forță se obține printr-un surplus de deplasare.

Și în cazul planului înclinat există un raționament care ne dă posibilitatea să găsim rezultatul obținut pe cale mai directă decît în exemplul precedent. Să ne închipuim un lanț închis care înconjură planul înclinat (fig. 8). Dacă lanțul se află în repaus, el va rămîne în această stare atîta timp cît nu

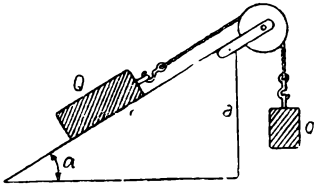


Fig. 7.

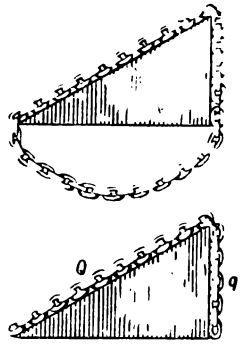


Fig. 8.

va interveni o forță dinafară. Porțiunea de lanț care atîrnă liber va solicita simetric restul lanțului, astfel că această porțiune poate fi tăiată. În acest caz, partea rămasă pe planul înclinat va fi mai departe în echilibru. Acest rest de lanț este împărțit în două părți de punctul superior al planului înclinat, greutatea acestor părți găsindu-se în același raport ca și lungimile lor. Prin aceasta am ajuns la condiția de echilibru, pe care o exprimăm acum în felul următor : contragreutatea q este mai mică decît greutatea Q cu factorul f, care nu este altceva decît $\sin \alpha$, α reprezentînd unghiul de pantă al planului înclinat. Deci $q = Q . \sin \alpha$.

Important pentru acest raționament este ipoteza că lanțul nu începe să se rotească. Aceasta pare posibil cu atît mai mult cu cît nu există nici un motiv ca rotația lanțului să se producă într-un sens sau în celălalt. De asemenea, nu se poate ști cu ce viteză s-ar roti lanțul. Toate aceste motive, însă, nu pot să întărească o ipoteză care nu este confirmată măcar experimental, deoarece în realitate apare întotdeauna frecarea, de care în acest caz s-a făcut abstracție. În felul acesta, denumirea de „experiență imaginară" dată ipotezei devine explicabilă : această experiență poate fi

executată numai cu mintea şi anume cu o minte care dispune de un bagaj de cunoştinţe anterioare.

Dacă experienţa imaginară este valabilă sau nu, aceasta o pot hotărî numai concluziile care decurg din ea. Dacă concluziile sînt confirmate de realitate, atunci experienţa imaginară poate fi considerată ca reuşită ; în caz contrar, trebuie să se renunţe la ea. Înainte, cercetătorii foloseau deseori experienţe imaginare. Ei nu dispuneau încă de noţiuni generale care să le permită să cuprindă fenomenele, ci trebuiau mai întîi să explice conţinutul acestor fenomene. Tocmai acest fapt îi deosebea pe cercetători de ceilalţi oameni, deoarece cercetătorii erau capabili ca din experienţe imaginare, cunoscute fiecăruia, să obţină noţiuni precise.

Cum s-a ajuns la experienţele imaginare? Cu timpul, acumulîndu-se material experimental, ipotezele începeau să se impună de la sine. Ele formau primele trepte care duceau către o privire de ansamblu clară. De aceea nu are nici un rost să susţinem sau să explicăm mai departe experienţele imaginare. Dacă în trecut s-a căutat să se explice anumite principii, ca, de exemplu, principiul „din nimic nu se creează nimic", aceasta s-a datorat numai unei autoamăgiri a cercetătorilor, ceea ce este oarecum scuzabil, deoarece filozofia plutea încă înaintea ochilor tuturora ca un exemplu şi nimeni nu se gîndea că în asemenea cazuri era vorba de fizică şi nu de filozofie. Această situaţie se explică în mare parte prin faptul că atunci fizica se găsea de-abia la începutul ei.

Pîrghia, palanul şi planul înclinat sînt maşini simple; ele se utilizează pentru a transporta cu forţe mici, greutăţi mari. Pentru a le putea folosi, trebuie să se cunoască relaţia între forţă şi rezistenţă. Această relaţie este dată de condiţiile de echilibru. Cu ajutorul acestei relaţii se poate stabili imediat ce forţă este necesară pentru ridicarea unei anumite greutăţi. Aceste condiţii de echilibru le-am putut deduce dintr-un singur principiu şi anume „lucrul mecanic total trebuie să fie nul". Toate rezultatele la care se ajunge folosind maşinile simple pot fi astfel uşor interpretate. În felul acesta avem o teorie a maşinilor simple ; această teorie formează capitolul cel mai vechi al mecanicii şi poartă numele de statică.

Istoricul staticii constituie cea mai bună ilustrare a modului cum se formează noţiuni din ce în ce mai largi, care culminează în cele din urmă cu noţiunea „lucrului mecanic". Se constată cum necesitatea practicii pregăteşte începuturile teoriei. Încă înainte de a se fi bănuit existenţa unei legi a pîrghiilor, în urma experienţei dobîndite în practică se prefera o pîrghie cu braţ lung. După aceea apare dorinţa de a aduna experienţa acumulată şi a o comunica altora, pentru ca aceştia, la rîndul lor, s-o aplice. Acest lucru poate fi realizat, însă, numai dacă experienţa acumulată poate fi clasificată şi sintetizată în aşa fel, încît să putem apela la ea în orice împrejurare. Adunarea materialului experimental din domeniul Staticii s-a făcut de nenumărate generaţii. Ceea ce a fost mai greu, a fost determinarea noţiunilor care să dea posibilitatea sistematizării materialului experimental adunat. La început s-a încercat să se înlocuiască fenomenele reale prin noţiuni. Introducerea noţiunii de forţă în locul tracţiunii sau presiunii corespunde acestei tendinţe. Abia mult mai tîrziu s-a ajuns la concluzia că este mai bine să se renunţe la această îngrădire. Rezultatul final îl constituie formarea noţiunii fundamentale de lucru mecanic sau extinderea noţiunii de forţă şi asupra greutăţii. Statica, aşa cum a fost dezvoltată pînă în prezent, nu posedă încă toată generalizarea de care ar fi capabilă. Chiar şi principiul fundamental care guvernează statica, „lucrul mecanic total trebuie să fie nul", este încă susceptibil de a fi generalizat. Cu această ocazie întîlnim mărimi matematice şi anume diferenţialele. Acestea sînt noţiuni ale timpurilor moderne şi în ceea ce priveşte posibilităţile ce le oferă, pun în umbră tot ce s-a transmis din antichitate. Diferenţialele au fost întîi folosite în calcule matematice şi numai mult mai tîrziu s-a încercat înţelegerea lor. Cum a putut fi însă introdus acest calcul diferenţial dacă nimeni nu putea să-l explice mai precis?

La prima vedere, această întrebare pare îndreptăţită — însă numai atîta timp cît cel ce o pune nu s-a preocupat de istoricul chestiunii. De foarte multe ori s-a întîmplat să se introducă anumite noţiuni care mai întîi au fost folosite formal şi numai mult mai tîrziu s-a cunoscut adevăratul lor conţinut. Aşa s-a întîmplat şi cu calculul dife-

rențial, introdus de *Leibniz* și care și-a păstrat pînă azi denumirea dată de el. În cursul lucrării ne vom ocupa mai pe larg cu acest calcul, deocamdată fiind suficiente numai cîteva observații, menite să ne familiarizeze cu un aspect paradoxal al problemei. În cazul calculului diferențial s-au folosit analogii care de fapt erau inexistente : Cum se face atunci că s-a ajuns totuși la rezultate exacte? Aceasta se explică prin faptul că analogiile au fost corectate ulterior.

Cu ajutorul calculului diferențial, noțiunea de lucru mecanic poate fi imediat generalizată. Cel mai bine este să se pornească de la un corp de dimensiuni neglijabile, pe care fizicianul îl numește punct material. Acest punct material descrie în mișcarea lui o linie care se numește traiectorie. Această traiectorie poate fi concepută ca o înșiruire de porțiuni foarte mici de spațiu. Dacă ne închipuim în locul porțiunilor foarte mici de spațiu niște porțiuni de spațiu „infinit de mici" — fără a cerceta încă ce se înțelege exact prin această expresie —, atunci elementele de spațiu se transformă în „diferențiale de spațiu". De data aceasta, noțiunea de lucru mecanic poate fi imediat generalizată. Prin lucrul mecanic necesar pentru deplasarea unui punct material sub acțiunea unei forțe pe o porțiune mică de drum se înțelege produsul dintre forță și acest drum sau spațiu mic (diferențiala spațiului).

Din cele spuse pînă acum se poate înțelege ușor de ce este necesară o stațiune cosmică de la care să pornească călătorii spre lună și mai tîrziu spre planete. În felul acesta s-ar economisi cea mai mare parte din lucrul mecanic pe care ar trebui să-l cheltuiască o rachetă lansată de la suprafața pămîntului pînă la locul stațiunii interplanetare. Lucrul mecanic necesar pentru a învinge atracția gravitațională de la stațiunea interplanetară mai departe ar fi relativ foarte redus.

Trebuie să înțelegem că, de pe poziția pe care ne situăm în cazul de față, nu sîntem încă în situația de a preciza noile noțiuni. Aceasta se va întîmpla mai tîrziu. Deocamdată, aceste noțiuni trebuie privite ca niște cuvinte noi pe care învățăm să le utilizăm întocmai cum am învăța o limbă străină, nu cu ajutorul unui dicționar, ci prinzînd-o și

obișnuindu-ne cu ea în timpul unei șederi într-o țară străină, prin contactul cu locuitorii acesteia.

Mișcarea unui punct material poate fi supusă unor restricții. Să ne închipuim o mică sferă așezată pe o masă; în acest caz, sfera poate să se rostogolească sau să alunece, însă nu va mai putea să se miște în jos prin placa mesii. Fiecare din mișcările posibile este denumită „deplasare virtuală". Nu trebuie însă neapărat ca aceste deplasări să aibă loc în realitate; este suficient numai faptul că ele sînt în concordanță cu condițiile puse, referitoare la mobilitatea punctului material; se efectuează deci o experiență imaginară. Dacă se consideră deplasările virtuale ca diferențiale ale spațiului, atunci cu ajutorul acestora se poate calcula „lucrul mecanic virtual", adică lucrul mecanic care ar trebui efectuat dacă s-ar executa în realitate deplasarea virtuală. Acest lucru ne permite să generalizăm principiul fundamental „lucrul mecanic total trebuie să fie nul" în așa fel, încît să cuprindă întreaga mecanică. Ceea ce mai rămîne încă de făcut în acest caz este, pe de o parte, să arătăm că avem dreptul să facem această generalizare, iar, pe de altă parte, să reducem toate problemele de mecanică la această formă generală. Întreaga mecanică este, așadar, cuprinsă în această generalizare, din care cauză se vorbește despre un principiu al mecanicii.

Dacă este vorba de mai multe puncte materiale, atunci fiecăruia dintre ele i se atribuie o deplasare virtuală. Fiecare dintre aceste deplasări comportă un lucru mecanic virtual. Pentru a exista echilibru, suma totală a lucrurilor mecanice virtuale, cuprinzînd toate punctele materiale, trebuie să rămînă constantă sau negativă. Cu alte cuvinte, să nu se producă nici o mișcare dacă mai înainte punctele materiale se găseau în repaus, deoarece în cazul de față pentru producerea mișcării ar trebui să se cheltuiască lucru mecanic și acest lucru mecanic ar trebui adus din exterior. Folosind acest raționament, în cazul pîrghiei există două puncte materiale, greutatea și contragreutatea, la fel ca în cazul palanului sau al planului înclinat. Prin urmare, toate acestea constituie cazuri speciale. Se poate demonstra ușor că noua afirmație asupra lucrului mecanic total virtual conține principiul fundamental folosit mai înainte.

Nu trebuie trecut cu vederea că noul principiu, care este numit de obicei principiul deplasărilor virtuale, nu a fost demonstrat, ci a fost numai formulat. În prezent, nu sîntem încă în situaţia de a-l putea demonstra. Pentru aceasta sînt necesare noţiuni care sînt mai largi decît acelea pe care ne-am bazat pînă în prezent. Este necesară, în special, o mecanică generală care să cuprindă nu numai starea de repaus, ci şi pe aceea de mişcare şi în care să se ajungă fără restricţii la principiul deplasărilor virtuale.

Se pune întrebarea de ce pînă în prezent nu s-a spus nici un cuvînt despre această lege fundamentală, care ar fi trebuit introdusă chiar de la început. Pentru a răspunde la această întrebare, să ne referim la istoricul fizicii. Noţiunile fundamentale nu au fost cunoscute de la început, ci s-a procedat mai întîi la dezvoltarea unor idei care tindeau să imite în mod naiv lumea exterioară.

În cazul pîrghiei, întîi s-a ajuns la noţiunea de braţ al pîrghiei şi apoi la aceea de moment static. Dacă aceste noţiuni permit să se stabilească legea pîrghiilor, totuşi nu sînt nici pe departe în măsură să exprime legi generale, aşa cum este cazul noţiunii de lucru mecanic. De la stabilirea momentului static pînă la apariţia noţiunii de lucru mecanic a fost necesar un interval de timp de aproape două mii de ani. *Arhimede* studia echilibrul pîrghiei cu ajutorul momentului static şi de-abia *Galileu* a folosit lucrul mecanic în acelaşi scop. În schimb, *Galileu* nu stăpînea cu precizie noţiunea de masă, care ar fi fost necesară pentru a putea enunţa legea fundamentală din mecanică, ceea ce îi reuşi abia lui *Newton*. Noţiunile fundamentale sînt stabilite de cele mai multe ori numai foarte tîrziu. Ele sînt puse apoi la baza teoriei care se va dezvolta ulterior.

Numai rareori s-a întîmplat ca noile noţiuni să fie de la început explicate în mod precis, fără a se naşte discuţii în ceea ce priveşte posibilităţile pe care le oferă. Un exemplu în această privinţă îl oferă principiul deplasărilor virtuale. S-a discutat adesea dacă acest principiu poate fi dedus din alte premize sau dacă prin caracterul său general reprezintă o ipoteză nouă. *Gauss*, pleda pentru această a doua părere, care s-a dovedit a fi greşită. Este instructiv să redăm aci cîteva observaţii dintr-un manual de mecanică mult citat. În acesta se spune : „Dezvoltarea

principiului deplasărilor virtuale este nedovedită ci exprimată doar, din punct de vedere istoric, ca o afirmație. Este necesar să atragem atenția asupra acestui lucru, deoarece *Laplace* a dovedit această dezvoltare tot atît de puțin în lucrarea sa „Mecanica cerească" pe cît este dovedită și în lucrarea de față. *Laplace* a exprimat acest principiu ca o afirmație numai din punct de vedere istoric și cu toate acestea, acest lucru a fost considerat drept o dovadă. Împotriva acestei păreri, *Poinsot* a scris o lucrare în care arată că matematicienii se lasă deseori înșelați nu numai de un drum lung pe care l-au parcurs într-o problemă, ci și de un drum foarte scurt. Matematicienii se lasă înșelați în cazul că ajung în sfîrșit, după foarte multe calcule, la o identitate pe care o consideră ca o teoremă. Un exemplu contrar îl reprezintă cazul nostru".

Dacă savanți de frunte pot fi de păreri atît de diferite, ne putem da seama cît de mari au fost dificultățile care au trebuit să fie învinse. Cînd *Newton* a spus despre el însuși că pare atît de mare numai pentru că stă pe umerii unor uriași, această afirmație, care exprimă modestia marelui savant, ne arată că aportul personal dispare aproape complet față de aportul general. În vechime, numele unor descoperitori erau uitate. Cu tot progresul enorm pe care l-a însemnat inventarea roții, nici pînă azi nu se știe cine a inventat-o.

Referitor la roată, se mai poate face încă o observație interesantă. Carele de război ale regilor asirieni aveau roți, cu toate că în acel timp pietrele uriașe erau transportate încă pe sănii (fig. 9). Acest lucru se explică prin faptul, că, pe vremea aceea, fie că nu se puteau construi axe destul de rezistente, fie că gîndirea oamenilor nu ajunsese încă la gradul de abstractizare de care era nevoie pentru a putea recunoaște analogiile. Se observase că vehiculele pe roți sînt mai rapide ; nu se observase însă, sau în orice caz nu suficient de conștient, că prin utilizarea roților, cu același efort s-ar fi realizat mai mult. Pentru transportarea unei pietre pe sanie era nevoie de o mie de sclavi, pe cînd un număr de 50 de sclavi ar fi fost suficient pentru a o trage pe roți.

Nu se poate presupune că numărul sclavilor ar fi fost suficient, deoarece ca sclavi erau utilizați prizonierii de

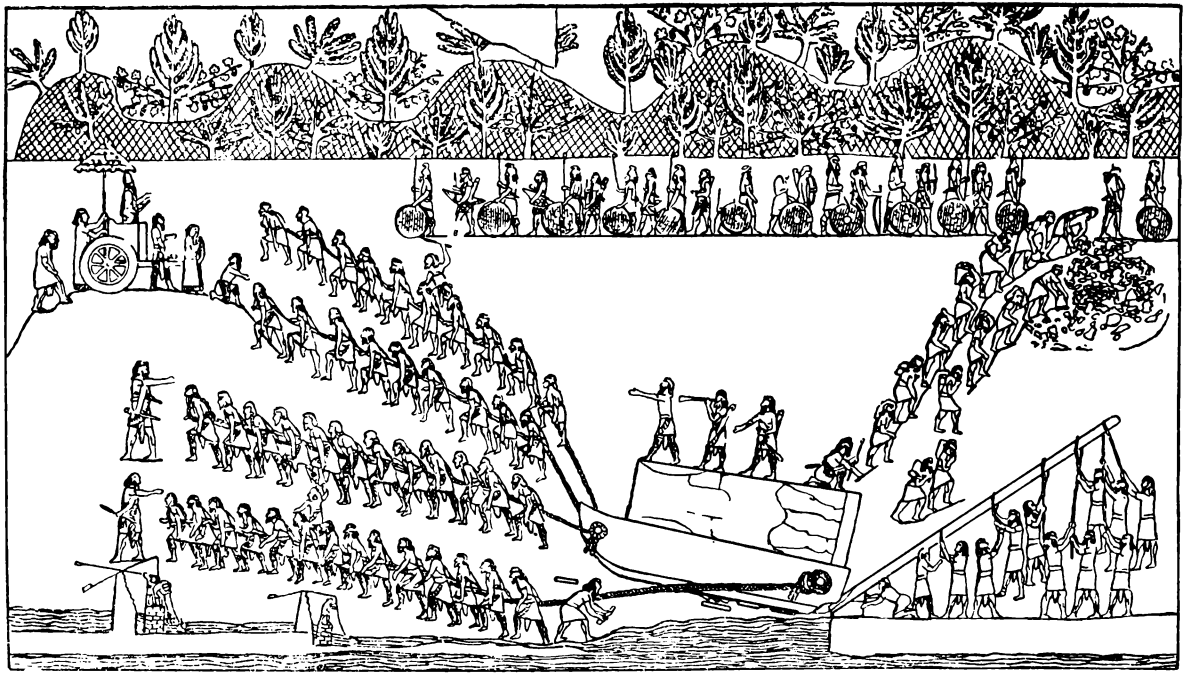


Fig. 9. — Prizonieri de război ai asirienilor trag la țărm, de pe o plută, o statuie enormă din piatră, a unui taur. Regele Senaherib privește acest lucru din carul său de paradă (Bazorelief de la Ninive).

războaie, şi războaie victorioase nu erau pe atunci la ordinea zilei. Prizonierii de război erau mai fericiţi să fie utilizaţi ca vite de muncă, decît să fie omorîţi. Fiecare epocă îşi avea, fără îndoială, metodele sale proprii în tratarea prizonierilor de război. Desigur, se poate ca utilizarea roţilor să fi fost numai un drept al regilor sau războinicilor, iar aceste drepturi nu puteau fi atribuite şi altora, decît dacă între ei ar fi existat acelaşi fel de a vedea lucrurile.

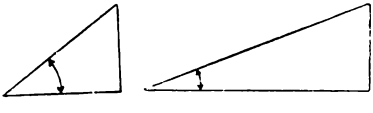
Chiar şi în cazul ştiinţelor avansate se întîmplă ca rezultatele obţinute să nu fie înţelese din toate punctele de vedere, în special atunci cînd conţin legi noi. În acest caz, se încearcă să se apeleze la legile vechi, care au intrat în obişnuinţă. Dacă nu se reuşeşte, atunci se cercetează mai departe dacă aceste legi nu duc la contradicţii. Abia la sfîrşit, după ce aceste legi noi au fost confirmate, ele sînt admise în fizică. Acest lucru pare foarte simplu ; totuşi nu este chiar aşa deoarece chiar în raţionamentele marilor savanţi se găsesc puncte slabe. De exemplu, *Arhimede* a încercat într-un tratat să deducă legea pîrghiilor enumerînd o serie de premise pe care le considera sigure şi care i se păreau suficiente pentru scopul urmărit. În cadrul raţionamentelor, el utiliza însă în mod tacit şi alte premise, fără să-şi dea seama de acest lucru.

Tendinţa de a referi legile noi la legile vechi a tulburat deseori orizontul primilor cercetători. Ei nu gîndeau cum poate fi considerată nouă o lege, din moment ce ea se verifică încontinuu de-a lungul timpului. Dacă s-au stabilit alte legi mai înainte, aceasta nu înseamnă că legile noi nu sînt tot atît de valoroase, deoarece toate legile, atît cele noi cît şi cele vechi, sînt valabile dacă sînt confirmate de observaţii. Trebuie însă să ne ferim de a interpreta aceasta în sensul că o ştiinţă matură nu ar trebui să procedeze sistematic. Ceea ce s-a spus aci se referă la începuturile ştiinţei, la apariţia primelor legi, cînd noţiunile nu erau încă precizate şi nici destul de generale. Acestea s-au dezvoltat ulterior numai datorită legilor descoperite şi numai după aceasta s-a putut obţine o privire unitară asupra acestor legi. Din această cauză, observaţiile de mai sus se referă la situaţia care exista înainte.

Primele legi verificate de practică au fost, în mod firesc, legile stabilite în Statică, ştiinţa care studiază starea de repaus a corpurilor. Situaţia devine mult mai complicată de îndată ce avem de-a face cu corpuri în stare de mişcare. De-abia geniului lui *Galileu* i-a reuşit formularea unei teorii ştiinţifice exacte a Dinamicii. El a avut o situaţie deosebit de grea, deoarece trebuia să stăpînească nu numai problemele ce interveneau, ci trebuia mai întîi să se descătuşeze de propriile sale prejudecăţi.

Ştiinţa, aşa cum o profesau adepţii lui *Aristotel*, sub oblăduirea bisericii, era o îngrămădire de idei filozofice pur speculative a fenomenelor reale, idei care azi ni se par de neconceput. Ca exemplu tipic citäm cazul căderii corpurilor. Conform învăţăturii lui *Aristotel*, fiecare corp îşi caută locul ce-i revine în spaţiu; pentru corpurile grele, acest loc este jos, iar pentru corpurile uşoare, sus. În felul acesta, se ajungea la concluzia că corpurile grele cad mai repede decît cele uşoare, dar nimeni nu se gîndea să cerceteze această afirmaţie, deoarece se considera, în mod tacit, că natura trebuie să se orienteze după cele spuse de savanţi.

Pentru a demonstra căderea liberă a corpurilor, trebuie făcute experienţe, trebuie observate la anumite intervale de timp poziţiile pe care le ocupă corpurile în cădere. Din aceste situaţii se pot trage concluzii asupra vitezei pe care o au corpurile la trecerea prin aceste poziţii, asupra forţelor care acţionează şi multe asemenea probleme. Mijloacele ce ne stau azi la dispoziţie ne permit să efectuăm foarte uşor aceste observaţii. *Galileu*, însă, nu dispunea de aceste mijloace. În schimb, el a făcut o ipoteză genială şi anume că: dacă în locul corpurilor în cădere liberă va studia mişcarea unor bile pe un jgheab înclinat, nu va schimba legea de mişcare a corpurilor, ci numai va încetini această mişcare (fig. 10). Se poate spune că în acest fel *Galileu* a studiat căderea corpurilor ca şi cum ar fi privit-o printr-o lupă care mărea timpul. Această presupunere genială l-a condus pe *Galileu* la un şir de suc-



Fgi. 10.

cese minunate. Pe baza noţiunilor mai largi pe care le posedăm astăzi, putem să confirmăm pe deplin ipotezele lui *Galileu*.

Începînd din partea superioară a jghiabului, *Galileu* marchează spaţii cu lungimi de 1, 4, 9, 16 ... şi constată că timpul necesar parcurgerii acestor spaţii era, respectiv, 1, 2, 3, 4 ... Pe atunci nu existau ceasornice de felul acelora pe care le avem astăzi, acestea fiind inventate abia pe baza cercetărilor pe care le-a iniţiat *Galileu*. *Galileu* a ştiut însă să suplinească această lipsă şi şi-a construit un ceas cu apă, cunoscut încă din antichitate, pe care l-a modificat în aşa fel, încît să poată măsura intervale mici de timp. Pentru aceasta el a luat un recipient încăpător şi de diametru mare, prevăzut la fund cu un orificiu mic, şi a lăsat apa să curgă pe o balanţă. Cantitatea de apă scursă era proporţională cu timpul. Deschizînd recipientul în momentul pornirii bilei şi oprind apoi scurgerea apei în momentul cînd bila ajungea la ţel, *Galileu* putea să indice cu suficientă exactitate intervalul de timp scurs.

Cu ce viteză ajunge bila prin rostogolire în partea de jos a planului înclinat? *Galileu* emite ipoteza că viteza finală a bilei este exact aceeaşi pe care ar fi căpătat-o bila în cădere liberă de la înălţimea planului înclinat. Cu cît panta planului înclinat este mai mică, cu atît bila va porni mai încet; deoarece însă distanţa corespunzătoare pe care o parcurge bila este mai lungă, bila va atinge în cele din urmă aceeaşi viteză finală.

Cum a ajuns *Galileu* la această ipoteză hotărîtoare? Printr-o experienţă imaginară, bila ajunsă prin rostogolire în partea de jos a planului înclinat se poate trimite din nou perpendicular, în sus, cu viteza finală pe care a căpătat-o. În acest mod, şi-a spus *Galileu*, bila nu poate să se ridice nici mai sus de locul ei de pornire şi nici să rămînă mai jos. În primul caz, ar însemna că gravitatea ar putea da un lucru mecanic neîntrerupt (perpetuum mobile), fapt încercat de multe ori, însă niciodată izbutit. În al doilea caz, se pare că nu ar exista această dificultate. Să considerăm, aşa cum gîndea *Galileu*, că mişcarea bilei se produce în sens contrar, întocmai ca un film rulat invers. În acest caz, la reîntoarcere, bila ar trebui să se ridice mai sus decît punctul ei de plecare şi din nou greutatea ar produce

un lucru mecanic, neîntrerupt. Rămîne, deci, numai posibilitatea ca bila să se ridice pînă la poziţia ei de plecare. Viteza necesară pentru ridicare trebuie, ca urmare a procesului reversibil al mişcării, să fie egală cu aceea dobîndită în căderea liberă. Prin aceasta se dovedeşte că vitezele finale, atît cea de rostogolire pe un plan înclinat cît şi aceea a căderii libere, sînt la fel de mari. Fizicianul modern ar ajunge foarte repede la acelaşi rezultat pe baza legii conservării energiei, despre care vom vorbi pe larg mai tîrziu. Aceasta însă numai graţie lui *Galileu*, care i-a pregătit calea.

În ipotezele sale, *Galileu* a dat dovadă de o putere de imaginaţie extraordinară. În acea vreme, pentru un cercetător al fenomenelor naturii care voia să depăşească pe predecesorii lui, imaginaţia era neapărat necesară. Pe atunci, un cercetător nu avea la dispoziţie suficiente noţiuni generale, ci trebuia întîi să şi le caute, bazîndu-se mai mult pe imaginaţie decît pe noţiuni cunoscute. Tema predominantă era principiul imposibilităţii unui „perpetuum mobile". Inventatori şi şarlatani de mult se gîndeau să construiască o maşină care să producă lucru mecanic din nimic. Chiar şi pe *Leonardo da Vinci* l-a preocupat această problemă, dovadă că a construit un model de maşină de acest gen, care se află în prezent la Muzeul Naţional german (fig. 11) Pusă însă în mişcare, maşina se opreşte după un timp. Cu toate nenumăratele insuccese de a se construi o asemenea maşină, a trecut mult timp pînă ce Academia Franceză s-a decis, în 1775, să renunţe la rezolvarea acestei probleme ; în caz contrar, membrii Academiei n-ar

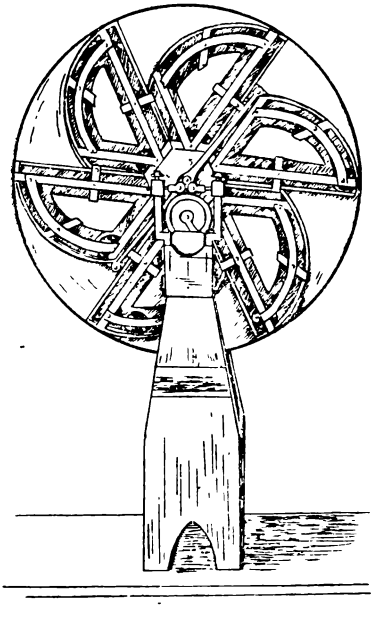


Fig. 11.

fi avut timp pînă la moarte să se mai ocupe de altceva (fig. 12).

L'Académie a pris, cette année, la réſolution de ne plus examiner aucune ſolution des Problèmes de la duplication du cube, de la triſection de l'angle, ou de la quadrature du cercle, ni aucune machine annoncée comme un mouvement perpétuel. Nous avons cru devoir rendre compte ici des motifs qui l'ont déterminée.

La conſtruction d'un mouvement perpetuel eſt abſolument impoſſible: quand même le frottement, la réſiſtance du milieu ne détruiroient point à la longue l'effet de la force motrice, cette force ne peut produire qu'un effet égal à ſa cauſe: ſi donc on veut que l'effet d'une force finie dure toujours, il faut que cet effet ſoit infiniment petit dans un tems fini. En faiſant abſtraction du frottement & de la réſiſtance, un corps à qui on a une fois imprimé un mouvement le conſerveroit toujours; mais c'eſt en n'agiſſant point ſur d'autres corps, & le ſeul mouvement perpétuel poſſible, dans cette hypothèſe, (qui d'ailleurs ne peut avoir lieu dans la Nature) ſeroit abſolument inutile à l'objet que ſe propoſent les Conſtructeurs des mouvemens perpétuels. Ce genre de recherches a l'inconvénient d'être coûteux, il a ruiné plus d'une famille, & ſouvent des Mécaniciens qui euſſent pu rendre de grands ſervices, y ont conſumé leur fortune, leur temps & leur génie.

Fig. 12. — Două extrase din hotărîrea Academiei de ştiinte a Franţei de a nu se mai preocupa în viitor de propuneri de rezolvare a problemei mişcării perpetue. Aceste extrase sînt de la pag. 61 şi 65 din Istoria Academiei Regale de Şiinţe din 1775, apărută în 1778.

Cauza insuccesolor a fost recunoscută numai treptat. Un cercetător olandez, *Stevin*, bazîndu-se pe imposibili-

tatea existenței unui perpetuum mobile, a butut dezvolta mecanica planului înclinat. El a atribuit în să mai puțină importanță rezultatului obținut și mult mai multă raționamentului în sine, astfel încît a ales acest ționament ca motto pentru lucrarea sa (fig. 13). Mult mai ti ziu, la mijlocul

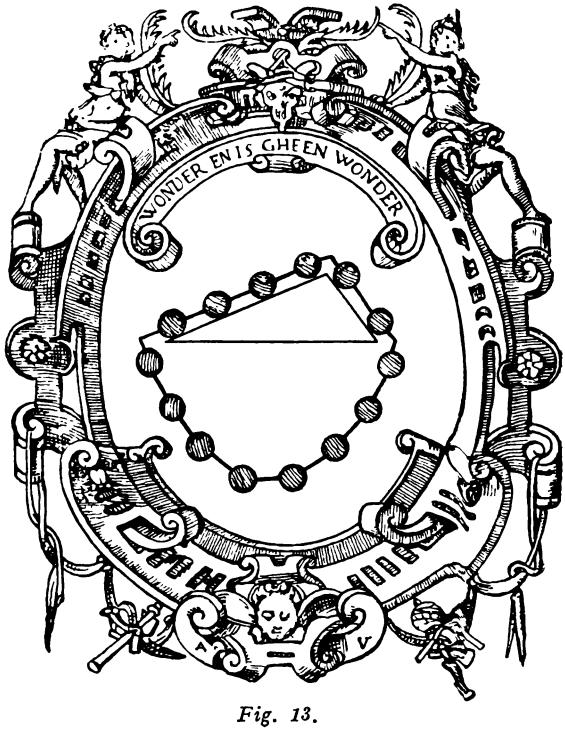


Fig. 13.

secolului trecut, această problemă a fost ezvoltată și formulată ca lege a conservării energiei. Aceas ă lege afirmă că, într-o mașină, energia se transformă într- altă formă de energie și că în această transformare, canti tatea de energie nici nu crește și nici nu scade. De atunci, a cest enunț formează o lege fundamentală care nu determin fenomenul, însă îl precizează. Cît de mari au fost străduint le pentru precizarea ideilor se vede indirect din faptul că însuși marele

Faraday a făcut ipoteze care nu numai că nu se pot menţine, dar sînt şi pline de neclaritate.

Atunci cînd se neagă posibilitatea folosirii cu succes a raporturilor dintre forţe, trebuie totuşi să se procedeze cu atenţie. Ţinînd seama că forţa gravitaţională variază cu locul unde se face observaţia, putem reduce această constatare la ipoteza că într-un loc, *A* (fig. 14), forţa gravitaţională este ceva mai mare decît în alt loc, *B*, cu toate că în ambele cazuri există un paralelism exact. Această ipoteză nu se poate realiza niciodată pe pămînt. Să presupunem că în punctul *B* se ridică acum o greutate la o înălţime de 1 m, apoi se transportă orizontal pînă în punctul *A*, unde se lasă în jos şi se duce din nou orizontal înapoi în punctul *B*. În acest caz s-a cîştigat lucru mecanic şi implicit energie, deoarece, conform celor presupuse de noi, pentru ridicarea greutăţii în punctul *B* se cheltuieşte mai puţin lucru mecanic decît se obţine la coborîrea greutăţii în punctul *A*, iar transportul greutăţii dintr-o parte în cealaltă şi înapoi se face fără cheltuială de lucru mecanic. Prin aceasta s-ar realiza în principiu o maşină care, folosind diferenţa forţei de atracţie gravitaţională între două puncte de pe suprafaţa pămîntului, ar produce necontenit lucru mecanic. Aceasta nu contrazice în nici un fel principiul care exclude posibilitatea existenţei unui perpetuum mobile, deoarece cîmpul de forţe nu este „conservativ" : lucrul mecanic care trebuie efectuat în sens contrar cîmpului de forţă depinde de drumul parcurs.

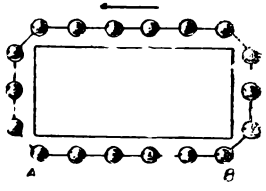


Fig. 14.

Pornind de la imposibilitatea existenţei unui perpetuum mobile, s-a reuşit să se tragă concluzii hotărîtoare. Este interesant să se urmărească raţionamente asemănătoare nu numai în mecanică, ci şi în alte domenii înrudite cu fizica. Astfel, în secolul trecut, astronomul *Camille Flammarion* a avut ideea de a-şi imagina existenţa unei fiinţe, denumită Lumen, care să se poată deplasa cu o viteză superioară aceleia a luminii : în vid, lumina se propagă cu o viteză de circa 300 000 km/s. Lumen ar urma deci să se deplaseze cu o viteză mai mare.

La început, nu se vede într-adevăr nici un motiv pentru care să nu se poată imagina acest lucru. *Flammarion* trase concluzia surprinzătoare că în acest caz ar fi suficient ca acest Lumen să fie întrebat, pentru a obține o descriere fidelă despre o întîmplare din decursul istoriei. Aceasta ar fi posibil, deoarece Lumen întrece lumina și, deci, ajunge din urmă lumina din timpurile trecute. Ne putem astfel închipui că Lumen ar fi întrebat cum s-a comportat mulțimea în fața cadavrului lui *Cezar* în timpul rechizitoriului lui *Antonius*.

Noi cunoaștem discursul lui *Antonius* și efectul acestuia numai din raportări istorice. Se potrivesc oare acestea cu cele descrise de *Shakespeare*? Nu știm acest lucru, ci am fost numai convinși de poet. Lumen însă poate să-l controleze pe *Shakespeare*. El pornește cu viteza mai mare decît aceea a luminii și călătorește atît timp, pînă ce ajunge din urmă lumina care pornise din Roma în univers cu aproape două mii de ani înainte și care poartă imaginile întrunirii din vremea aceea. Atunci Lumen își frînează puțin viteza, pînă ce acesta are aceeași valoare cu viteza luminii și privește în liniște imaginea ce i se oferă. După aceea, Lumen trebuie să se întoarcă din nou pe pămînt, pentru a ne putea reda toate detaliile scenelor privite.

Din punct de vedere al fizicii, aceasta înseamnă că pentru el însuși Lumen poate să întoarcă timpul după voia lui. El poate să alerge după orice clipă, trecută de mult, și s-o retrăiască din nou. Pentru el, trecutul și viitorul sînt identice. Cu această concluzie însă nu sîntem de acord. Din această cauză, să renunțăm mai bine la ipoteza care l-a creat, tăgăduind că sînt posibile viteze mai mari decît aceea a luminii. Prin aceasta sîntem în deplină concordanță cu dezvoltarea ulterioară a mecanicii moderne, asupra căreia vom vorbi pe larg mai tîrziu.

Deși pare paradoxal, chiar în acest stadiu al cunoștințelor nu poate fi încă precizat firul conducător. Pentru a face posibil acest lucru, trebuie descoperite mai întîi noțiunile fundamentale. Astăzi, aceste noțiuni, și anume noțiunile de masă și de forță, ne par evidente, deși au devenit evidente de-abia în decurs de secole. Nici *Galileu* nu poseda aceste noțiuni. El însă le-a bănuit; ba, chiar mai mult, prin cercetările sale, *Galileu* a pregătit stabilirea

lor şi din acest motiv el este cel mai însemnat precursor al lui *Newton*, care apoi a stabilit definitiv aceste noţiuni fundamentale.

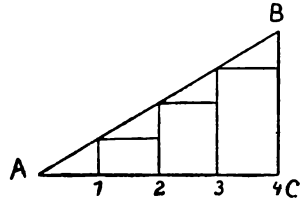


Fig. 15.

Pentru stabilirea acestor noţiuni erau necesare noţiuni matematice noi, găsite aproape în acelaşi timp de *Newton* şi *Leibniz* şi care au fost considerate în acel timp ca foarte dificile. Astăzi, ele sînt socotite destul de simple şi se învaţă încă din şcoală. *Galileu* nu cunoştea aceste noţiuni, astfel că de multe ori el nu ştia cum să interpreteze observaţiile pe care le făcea ; el a trebuit mai întîi să întrezărească cheia legii căderii libere a corpurilor, cheie pe care azi ne-o pun la îndemînă matematicile superioare.

Observaţiile lui *Galileu* pot fi reprezentate printr-un triunghi (fig. 15) pe a cărui orizontală notăm de la stînga spre dreapta timpul, iar pe verticală, viteza corespunzătoare a bilei ce se rostogoleşte. Punctele finale ale verticalelor formează în acest caz o linie dreaptă. Din triunghiul astfel format, se vede că verticala din punctul 2 este depăşită în înălţime de verticala din punctul 3 cu aceeaşi distanţă cu care ea însăşi depăşeşte verticala din punctul 1. În mod asemănător, verticala din punctul 3 este depăşită în înălţime de verticala din punctul 4 cu aceeaşi distanţă cu care ea însăşi depăşeşte verticala din punctul 2. Acest lucru este valabil pentru toate punctele. Din această cauză, bila care se rostogoleşte parcurge acelaşi spaţiu pe care l-ar parcurge o a doua bilă care s-ar rostogoli uniform, avînd o viteză constantă egală cu jumătate din viteza finală a primei bile ; spaţiul cu care prima bilă rămîne în urmă în prima jumătate a deplasării ei faţă de cea de-a doua este recîştigat în a doua jumătate a drumului. Pentru obţinerea acestei concluzii este desigur nevoie de un om ca *Galileu* sau de cunoaşterea calculului integral. Astăzi, noi cunoaştem acest calcul şi cu ajutorul lui putem să confirmăm imediat concluzia la care a ajuns *Galileu*. În cazul de faţă, genialitatea unui om poate fi înlocuită printr-o integrală.

Dacă viteza bilei ce se rostogoleşte este după prima secundă v, atunci viteza va creşte în intervalul de timp

de t secunde la valoarea vt. Jumătatea acestei valori este $\frac{vt}{2}$ şi ea reprezintă viteza cu care trebuie să se deplaseze bila care are mişcarea uniformă. Această bilă parcurge în intervalul de timp t secunde, un spaţiu care se obţine înmulţind viteza mişcării uniforme cu timpul. La fel se calculează şi spaţiul parcurs de un automobil care se deplasează cu o mişcare uniformă : de exemplu, un automobil care merge cu o viteză de 60 km pe oră va parcurge în două ore o distanţă de $60 \times 2 = 120$ km. Pentru spaţiul parcurs de bila care se deplasează cu o mişcare uniformă rezultă valoarea de $t \cdot \frac{vt}{2}$ sau, prescurtat, $\frac{vt^2}{2}$. Conform legii lui *Galileu*, această valoare reprezintă, în acelaşi timp, spaţiul parcurs de bila ce se rostogoleşte în intervalul de timp t secunde. Prin aceasta, legea mişcării pe plan înclinat este stabilită : bila care se rostogoleşte pe un plan înclinat parcurge, după intervalul de timp t secunde, o distanţă egală cu $\frac{vt^2}{2}$, în care v este viteza atinsă după trecerea primei secunde.

În felul acesta am găsit şi legea după care are loc căderea liberă a corpurilor. *Galileu* a presupus că mişcarea pe planul înclinat nu este altceva decît o „cădere încetinită", astfel că legea de mişcare a corpurilor pe planul înclinat trebuie să fie identică cu aceea a căderii libere a corpurilor. Într-adevăr, în expresia obţinută nu există nici un termen care să o limiteze la cazul special al planului înclinat. Nu avem decît să considerăm planuri din ce în ce mai înclinate, astfel încît în cele din urmă acestea să atingă un unghi de 90^0 ; în acest caz, căderea liberă reprezintă limita către care tinde mişcarea corpului pe planul înclinat. Formula noastră rămîne deci valabilă, trebuind să înlocuim numai pe v cu viteza pe care o atinge un corp în cădere liberă după prima secundă ; această valoare se notează azi cu litera g şi este egală cu circa 10 m/s.

Galileu a observat că viteza creşte proporţional cu timpul ; viteza creşte în fiecare secundă cu valoarea g, deci în intervalul de timp t, ea creşte cu valoarea $g.\ t$. Prin

aceasta, *Galileu* recunoaşte în g măsura creşterii vitezei în cazul căderii libere a corpurilor; astăzi g este denumită „acceleraţia gravitaţională". Se poate spune că *Galileu* a înţeles noţiunea şi importanţa acceleraţiei, însă nu din punct de vedere general şi aceasta datorită faptului că el nu cunoştea încă noţiunea de derivată.

Cu toate acestea, *Galileu* caracterizează perfect căderea liberă a corpurilor. Această mişcare nu este uniformă, deoarece am văzut că viteza creşte continuu; însă viteza creşte în intervale de timp egale cu o cantitate constantă, deci căderea liberă este o mişcare uniform accelerată. Acceleraţia gravitaţională g este aceeaşi pentru toate corpurile — sau, cu alte cuvinte, toate corpurile cad la fel de repede, indiferent de natura lor. Deosebirile pe care le observăm în fiecare zi, de exemplu că o bilă de plumb pare să cadă mai repede decît un fulg, se explică cu uşurinţă datorită rezistenţei aerului. Experienţele făcute în vid ne arată că toate corpurile cad la fel de repede.

Galileu nu dispunea încă de mijloacele noastre tehnice, de aceea a fost nevoit să studieze căderea încetinită a unor bile ce se rostogoleau pe planul înclinat. Se pune întrebarea dacă se poate determina valoarea acceleraţiei gravitaţionale g prin experienţe de acest fel. Atît o bilă care se rostogoleşte pe un plan înclinat (fig. 15), cît şi un corp care ar cădea liber de la punctul cel mai înalt al acestui plan înclinat ajung jos cu aceeaşi viteză finală V. Fie t şi T intervalele de timp corespunzătoare. În acest caz, rezultă că lungimea planului înclinat AC este egală cu produsul dintre jumătatea vitezei finale şi intervalul de timp corespunzător, adică este egal cu $\frac{Vt}{2}$, iar înălţimea $BC = \frac{VT}{2}$. Raportul celor două laturi ale triunghiului, AC şi BC, va fi, după simplificarea cu $\frac{V}{2}$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{t}{T}.$$

Pe de altă parte, conform legii căderii libere a corpurilor, $V = vt$ şi $V = gT$, din care rezultă

$$vt = gT$$

deci

$$\frac{t}{T} = \frac{g}{v}$$

Raportul laturilor AC şi BC este cunoscut, deoarece el poate fi determinat prin măsurarea acestor laturi. Acest raport are valoarea f.

Rezultă că :

$$f = \frac{t}{T} = \frac{g}{v}$$

deci, pe de o parte,

$$T = \frac{t}{f},$$

iar, pe de altă parte,

$$g = fv,$$

astfel încît, pe baza experienţelor făcute cu un plan înclinat, se pot determina atît valoarea timpului de cădere a corpurilor, cît şi valoarea acceleraţiei.

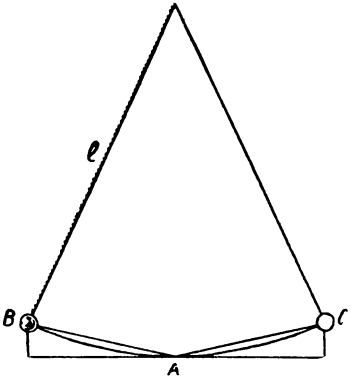


Fig. 16.

Galileu a încercat să utilizeze noile rezultate obţinute. El a considerat un pendul compus dintr-o bilă grea care atîrnă de un fir şi a spus că mişcarea acestuia ar putea fi considerată aproximativ la fel cu căderea pe un plan înclinat. În adevăr, un arc de cerc mic coincide aproape cu coarda corespunzătoare lui. Dacă pendulul se deplasează numai puţin din poziţia sa de echilibru, mişcarea lui se poate afla aplicînd legile planului înclinat. În acest caz se obţine în mod surprinzător formula justă pentru durata de oscilaţie a pendulului. Pentru a o deduce, trebuie remarcat că pendulul oscilează în acelaşi fel la stînga şi la dreapta. Trebuie deci luate două planuri înclinate simetrice, AB şi AC (fig. 16). Prin punctele A, B şi C se poate

trasa un singur cerc, a cărui rază este determinată de lungimea l a pendulului.

Printr-un calcul simplu se poate arăta că un corp care cade liber de la înălțimea $2\,l$ soseşte în acelaşi timp cu o bilă care se rostogoleşte pe planul înclinat AB; timpul scurs se notează cu t şi indică durata oscilaţiei de la B la A. După aceasta, pendulul oscilează de la A la C în acelaşi interval de timp, astfel că $2\,t$ reprezintă durata unei oscilaţii complete a pendulului. Noi ştim însă că, în conformitate cu legile căderii libere, $2\,l = \frac{gt^2}{2}$, din care rezultă că durata de oscilaţie $2t$ a pendulului are valoarea aproximativă de

$$4\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

Pentru a avea o valoare mai exactă, vom înlocui cu $\pi = 3,\,141\ldots$. cifra 4, π reprezentînd raportul dintre lungimea cercului şi diametrul său. Diferenţa nu este mare; *forma* legii pendulului rămîne aceeaşi.

Utilizînd noile rezultate, *Galileu* a reuşit să obţină un rezultat important referitor la legea inerţiei. Astăzi putem exprima această lege fundamentală în felul următor: forţele produc acceleraţii. Aceasta nu trebuie considerată ca o definiţie, ci mai curînd ca o relaţie între noţiunile fundamentale, deci ca o *axiomă*. Asupra acestei probleme vom reveni. În cele ce urmează vom explica raţionamentul care l-a dus pe *Galileu* la această concluzie.

S-a arătat ce relaţie există între v şi g. Deocamdată este suficient să ştim că v, adică viteza atinsă după prima secundă, este cu atît mai mică cu cît unghiul pe care îl formează planul înclinat cu orizontala este mai mic. Dacă bila se mişcă la coborîre cu o viteză mai mică v, tot astfel, la o inversare a sensului mişcării, viteza la urcare va fi mai mică, deoarece mişcarea se consideră simetrică. Să ne închipuim acum că bila care s-a rostogolit pe planul înclinat AB, datorită vitezei finale pe care o are, se ridică pe al doilea plan înclinat BC (fig. 17). Cu cît unghiul CBD este mai mic, cu atît încetinirea va fi mai mică şi, deci, cu atît bila se va mişca mai mult timp şi va parcurge un spaţiu mai mare. În cazul limită, cînd BC coincide cu orizontala BD, nu se mai produce nici o întîrziere şi bila se rostogoleşte mai

departe cu aceeaşi viteză, fără ca să se oprească vreodată. Aceasta constituie formularea directă a principiului inerţiei.

Evident că *Galileu* nu a văzut aceasta cu aceeaşi claritate cu care s-a arătat aci. El se găsea încă prea mult sub influenţa părerilor timpului său şi chiar dacă se elibera treptat de ele, totuşi adesea recădea sub influenţa lor. Cu toate acestea, în multe ca-

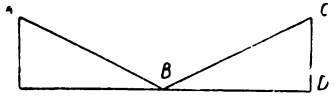


Fig. 17.

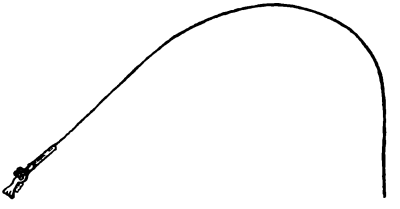


Fig. 18.

zuri *Galileu* a aplicat corect principiul inerţiei corpurilor. Astfel, el ştia că un glonţ de puşcă, fără greutate, s-ar deplasa în linie dreaptă pe direcţia ţevii. Ce progres reprezintă chiar numai această singură observaţie se poate vedea din părerea pe care şi-a exprimat-o cîteva decenii înainte cunoscutul matematician *Tartaglia*. Acesta credea că traiectoria unui proiectil se compune dintr-o linie dreaptă iniţială, urmată de un arc de cerc, şi din tangenta verticală la capătul acestuia (fig. 18).

Aceasta era, într-adevăr, o părere foarte naivă, care în cel mai bun caz se baza pe o aparenţă înşelătoare. La început, se pare că proiectilul nu este influenţat de greutatea lui, însă numai din cauză că nu se ia în consideraţie intervalul scurt de timp care este exprimat prin cuvîntul „la început". În realitate, proiectilul plecat din ţeava puştii începe imediat să cadă, la început viteza de cădere fiind mică şi, implicit, fiind mică şi distanţa pe care o străbate proiectilul în cădere. În felul acesta, *Galileu* a ajuns la o nouă concepţie fundamentală şi anume că traiectoria unui proiectil este rezultatul a două mişcări independente pe care le execută proiectilul. Una din mişcări este determinată de principiul inerţiei şi a fost indicată mai înainte. Cea de-a doua mişcare este reprezentată de căderea liberă a proiectilului.

Pentru a putea urmări grafic această mişcare compusă, să trasăm în direcţia ţevii puştii spaţiile pe care le-ar par-

curge un proiectil fără greutate în timp de 1, 2, 3, 4 ... secunde (fig. 19). Din aceste puncte, să trasăm în jos distanţele verticale pe care le-ar parcurge un corp în cădere liberă în timp de 1, 2, 3, 4 ... secunde. Punctele finale ale acestor distanţe determină traiectoria proiectilului. Traiectoria stabilită prin această metodă diferă, fără îndoială, mult de cea reală. Cauza este rezistenţa aerului, de care în mod intenţionat nu am ţinut seama.

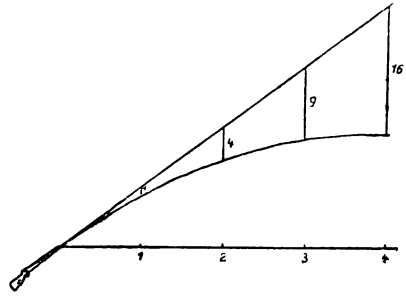


Fig. 19.

Din cele expuse mai sus rezultă că dinamica începe de la *Galileu*. În statică, forţa apărea sub formă de presiune sau tracţiune ; astfel, la legea pîrghiilor s-a vorbit de greutăţi. Pasul hotărîtor a fost făcut atunci cînd s-a ajuns la concluzia că forţa produce mişcare şi modul în care aceasta este influenţată de forţă ; forţa determină acceleraţia. La această concluzie s-a putut ajunge numai prin experienţă, atît în cazul legilor căderii libere a corpurilor, cît şi în cazul principiului inerţiei. La început, nu era încă stabilit dacă nu cumva forţa determină viteza sau chiar şi variaţia acceleraţiei, aşa cum credeau urmaşii lui *Aristotel*. Rezultă că pentru a putea determina felul în care va decurge mişcarea, în cazul cînd se dau forţele ce acţionează şi care se consideră drept cauza mişcării, trebuie considerate atît forţa cît şi acceleraţia ca noţiuni fundamentale.

Cum se ajunge de la rezultatele obţinute de *Galileu* la noţiunea de forţă ? Se recurge la principiul inerţiei, aşa cum a fost formulat de *Galileu* şi se observă că pe planul orizontal o bilă nu este supusă acţiunii gravităţii. Din această cauză bila se rostogoleşte mai departe cu viteză constantă. Deci, dacă nu acţionează nici o forţă, viteza nu se schimbă ; ca urmare, acceleraţia dispare, deoarece ea reprezintă o măsură pentru variaţia vitezei. Pe de altă parte, din legile căderii libere a corpurilor rezultă că acceleraţia, deci valoarea lui g, determină perfect mişcarea. Aceasta permite generalizarea că forţa determină mişcarea prin acceleraţia produsă.

Legile căderii corpurilor şi principiul inerţiei constituie două realizări importante ale lui *Galileu*. A treia o constituie afirmaţia că mai multe mişcări, independente una de alta, se pot compune într-o mişcare rezultantă. Astfel, traiectoria unui proiectil se compune dintr-o mişcare uniformă în direcţia ţevii puştii şi din mişcarea de cădere liberă a proiectilului. Rezultă că, în cazul unor mişcări independente, atît vitezele cît şi acceleraţiile se pot compune obţinînd viteza, respectiv acceleraţia mişcării rezultante. Trebuie, însă, să se ţină seama că atît viteza cît şi acceleraţia au o anumită mărime şi o anumită direcţie. Ele pot fi reprezentate prin nişte segmente orientate (fig. 20), a căror lungime indică mărimea vitezei sau a acceleraţiei, iar sensul lor, direcţia acestora. Aceste segmente orientate se numesc *vectori*. Doi vectori determină un paralelogram a cărui diagonală reprezintă suma lor şi tocmai această sumă trebuie determinată la compunerea vitezelor sau acceleraţiilor.

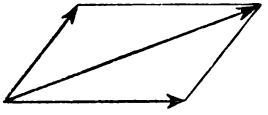


Fig. 20.

Un alt exemplu îl formează coborîrea schiorilor. Dacă se face abstracţie de faptul că schiorul acţionează la început pentru a-şi mări viteza de coborîre, atunci avem de-a face cu un caz asemănător cu acela al bilei care coboară pe planul înclinat. Se poate pune atunci întrebarea: cu cît se micşorează, ca să spunem aşa, greutatea schiorului care coboară? În timpul coborîrii, schiorul este parţial sustras influenţei atracţiei gravitaţionale. Pentru un plan cu o pantă de 45°, rezultă că la coborîre schiorul apasă asupra pantei numai cu o parte din greutatea sa iniţială şi anume cu 0,7 din greutate. El are impresia că pluteşte.

Pare paradoxal să se vorbească de compunerea mişcărilor, deoarece în realitate se produce o singură mişcare şi anume mişcarea rezultantă. Acest mod de a vorbi este îndreptăţit, deoarece teoria conduce la mişcarea reală dedusă din indicaţii simple, fapt ce se poate realiza, fără îndoială, în acest mod, după cum s-a constatat în cazul exemplului cu traiectoria proiectilului. *Bacon* numeşte acest procedeu „dissecare naturam", adică disecarea naturii. Pentru a ajunge la astfel de rezultate este necesar un ochi ager, aşa cum îl au marii cercetători. Un cercetător nu trebuie să se mulţu-

measică cu noţiunile anterioare, ci el trebuie să recunoască probleme noi. Dacă a sosit apoi timpul ca aceste probleme să fie rezolvate, atunci cercetătorul va avea şi capacitatea de a lămuri noile noţiuni necesare rezolvării acestor probleme. Acest lucru reuşeşte rar de la prima încercare. Mult mai rar însă reuşeşte cercetătorul să generalizeze de la început noile noţiuni.

Galileu a reuşit să introducă noţiunea de acceleraţie pentru cazul căderii libere a corpurilor, fără însă a o putea generaliza pentru orice mişcare. Dar cercetătorul are întotdeauna o „presimţire" a lucrurilor noi. Aceasta ne-o va arăta o anecdotă amuzantă. Într-o zi, a sosit la *Galileu* o delegaţie de la Florenţa, care dorea să ştie de ce pompele nu puteau ridica apa mai sus de 30 de picioare. *Galileu* a răspuns că pentru a şti acest lucru, trebuie mai întîi să se afle din ce cauză pompele pot ridica apa pînă la o înălţime de 30 de picioare. Un membru al delegaţiei explică acest lucru prin „horror vacui", adică teama naturii pentru vid. Perfect, se zice că ar fi răspuns *Galileu*, atunci rămîne numai să se ştie de ce natura n-ar mai avea nici o teamă de vid, dacă ar trebui să ridice apa mai sus de 30 de picioare. Se mai spune că un elev al lui *Galileu*, cu numele de *Torricelli*, era de faţă la această discuţie. El a fost acela care a descoperit ulterior cauza fenomenului despre care era vorba şi anume presiunea aerului.

NEWTON ŞI OPERA SA

Se spune că datorită căderii unui măr, *Newton* a descoperit forţa de atracţie gravitaţională. Un altul s-ar fi limitat la o reflexie asupra proverbului „Mărul nu cade departe de pom" şi ar fi mîncat liniştit mărul. Cît de elocventă este această poveste, ea nu este totuşi decît o invenţie. Povestea are însă ceva esenţial în ea şi anume faptul că un cercetător vede în orice banalitate o problemă şi caută să o aprofundeze. Pentru aceasta este necesară o atenţie veşnic trează, care însă n-ar servi la nimic dacă n-ar fi legată de cunoştinţe profunde. Întotdeauna progresele s-au legat de cunoştinţe mai vechi ; fiecare cercetător creează bazîndu-se pe realizările predecesorilor săi. Astfel, opera începută de *Galileu* a fost desăvîrşită de *Newton*.

Încercînd să se împiedice rostogolirea unei bile pe un plan înclinat, se găseşte pentru forţa care trebuie opusă valoarea $Q.f$. Aci s-au menţinut vechile notaţii, astfel încît Q reprezintă greutatea bilei, iar f, panta, adică raportul dintre înălţimea şi lungimea planului înclinat. De la *Galileu* încoace, nu se mai face nici o deosebire între forţele care apar în statică şi cele din dinamică. Pentru aceeaşi forţă poate să existe fie repaus — în acest caz forţa se prezintă ca o presiune sau tracţiune — fie mişcare. O bilă apasă asupra unei mese şi dacă nu o împiedică nimic, cade în jos cu o mişcare accelerată, în ambele cazuri sub influenţa forţei de atracţie gravitaţionale. Aceeaşi forţă se manifestă şi în cazul planului înclinat, numai că în acest caz, după cum s-a mai spus, este micşorată cu factorul f; valoarea ei nu este Q, ci $Q . f$. Conform rezultatelor anterioare, acceleraţia unei bile care se rostogoleşte pe un plan înclinat este însă mai mică decît în cazul căderii libere cu acelaşi factor, deci atît forţa cît şi acceleraţia se înmulţesc cu fracţia subunitară f. Din această cauză, raportul lor rămîne acelaşi, indiferent de panta planului înclinat. Dacă nu vrem să atribuim forţei gravitaţionale o poziţie specială, atunci se cere ca în toate cazurile să fie respectată următoarea condiţie : pentru unul şi acelaşi corp, între forţa care acţionează şi acceleraţia produsă de această forţă există acelaşi raport. Matematic exprimat, aceasta ne dă :

$$\frac{\text{Forţă}}{\text{Acceleraţie}} = m \text{ sau Forţa} = m . \text{ Acceleraţie},$$

în care m este un factor de proporţionalitate, care are pentru fiecare corp o valoare numerică determinată. Acest factor m îl numim masa corpului ; ea stabileşte raportul dintre forţa $\vec{F}$ ce se exercită şi acceleraţia produsă, $\vec{a}$. Cu cît masa m este mai mare, cu atît acceleraţia pe care o produce o anumită forţă este mai mică : la o masă de două ori mai mare, acceleraţia se reduce la jumătate. Trebuie remarcat că forţa şi acceleraţia sînt mărimi vectoriale şi din această cauză le notăm în alt mod decît masa, care nu este o mărime vectorială. În conformitate cu cele supse, vom nota deci astfel :

$$\vec{F} = m . \vec{a} .$$

Această formulă simplă conţine întreaga mecanică, atît Statica cît şi Dinamica, şi a fost stabilită de *Newton*. Evident că *Newton* nu a obţinut direct această formulă şi chiar dacă şi-a dat seama de importanţa ei, nu era încă lămurit complet asupra sensului ei. Aceasta se poate vedea din faptul că el leagă formula de mai sus de încă alte două legi. Numai aceste trei legi împreună le consideră *Newton* ca o bază suficientă pentru mecanică. Aceste trei legi au fost denumite de *Newton* legile mişcării. Între ele, formula noastră ocupă al doilea loc. Primul loc l-a acordat *Newton* principiului inerţiei. Acesta reiese imediat din legea a doua a dinamicii, dacă se dă acceleraţiei valoarea zero. În acest caz, creşterea vitezei dispare şi aceasta rămîne constantă. Conform celei de-a doua legi, forţa dispare, deoarece ea este dată de un produs în care unul din factori, acceleraţia, dispare, adică $\vec{F} = m.0 = 0$. Mişcarea în care nu intervine nici o forţă se produce deci cu viteză constantă, aşa cum cere principiul inerţiei. Legea a doua a dinamicii permite o aplicaţie interesantă. Dacă un corp se mişcă uniform pe un arc de cerc, atunci valoarea vitezei nu se schimbă, însă se schimbă direcţia sa, care este determinată în fiecare moment de tangenta la cerc în punctul respectiv. O dată cu schimbarea direcţiei apare o acceleraţie îndreptată către centrul cercului şi care are valoarea $\frac{v^2}{r}$, unde v este viteza mişcării circulare, iar r, raza cercului. Acceleraţia cere întotdeauna existenţa unei forţe, în acest caz apare o forţă centrifugă (fig. 21).

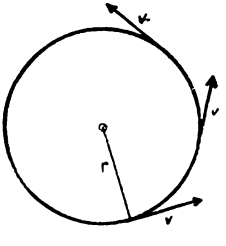


Fig. 21.

Fiecare automobilist simte această forţă ori de cîte ori ia repede o curbă, el fiind împins în afara curbei. Aviatorii, ca urmare a vitezelor mari cu care zboară, simt mult mai puternic efectul acestei forţe şi există teama că ea va fi cauza care va împiedica zborul cu viteze de mii de kilometri pe oră. În acest caz, omul va fi acela care nu va rezista şi nu maşina, deoarece este inevitabil ca un aviator să ia uneori curbe la care să se producă o forţă centrifugă atît de mare, încît organismul omenesc să n-o poată suporta. Luînd pentru calcul

fomula indicată mai sus, atunci pentru o curbă în formă de arc de cerc cu diametrul de 1 km, pentru o viteză de zbor de 600 km pe oră, rezultă o valoare de $5\frac{1}{2}$ ori mai mare decît acceleraţia gravitaţională. Corpul omenesc, în poziţie şezîndă, nu poate rezista mult timp acestei stări, deoarece sîngele devenit brusc de 6 ori mai greu presează cu putere în afară ; ca urmare, vasele de sînge se vor rupe, producînd hemoragii interne sau leşin. În poziţia culcat pe spate ori pe burtă, se pot suporta fără vătămări, timp de 2 pînă la 3 minute, presiuni chiar de două ori mai mari decît valoarea de mai sus.

În basme, vrăjitorul răpeşte pe protejatul său şi-l duce într-o clipă pînă la sfîrşitul pămîntului. Noi să fim ceva mai modeşti şi, în locul unei clipe, să considerăm o secundă pentru o distanţă de numai 1 000 km. În cel mai bun caz, răpirea se petrece în aşa fel, încît cu o acceleraţie constantă G, viteza creşte de la zero pînă la o valoare maximă, pentru ca apoi să scadă în sens invers pînă la valoarea zero. Dacă la drumul parcurs în sens invers se aplică legea lui *Galileu* privitoare la căderea corpurilor, rezultă $\frac{1}{2}\ G\ (1/2)^2 = 500\ 000$ m, din care rezultă că G este de circa 400 000 ori mai mare decît acceleraţia gravitaţională. Sub o greutate proprie de 400 000 ori mai mare decît cea normală, fiecare vieţuitoare s-ar transforma însă într-un terci de nerecunoscut. Astfel, fizica înlătură basmele care îndrăznesc să pătrundă în domeniile ei.

Adesea nu se ţine sema că, din punct de vedere fiziologic, numai acceleraţia se face simţită şi niciodată viteza, oricît de mare ar fi ea. Aceasta rezultă din legea a doua a dinamicii, deoarece numai în cazul acceleraţiei apar forţe care acţionează asupra organismului vieţuitoarelor. Cînd însă acceleraţia dispare, adică viteza de mişcare este constantă ca mărime şi direcţie, nu mai apare nici o forţă.

S-a susţinut că accesoriile inutile din formulările lui *Newton* trebuie interpretate din punct de vedere psihologic. Trebuie să ne închipuim un cercetător care porneşte de la noţiuni cunoscute, pentru a formula legile fundamentale ale dinamicii. Noţiunile izolate — ca, de exemplu, forţa — au în mintea lui o semnificaţie dublă, cercetătorul privindu-le,

pe de o parte, ca forţă de tracţiune sau de presiune, iar, pe de altă parte, ca o cauză a acceleraţiei. Aceste noţiuni separate duc apoi la o reprezentare fragmentată. Trebuie să admitem că prin aceasta nu se schimbă cu nimic faptul că reprezentarea nu se produce atît de simplu pe cît ar fi posibil.

În orice caz, trebuie să facem aci o precizare. Cînd *Newton* spune că masa unui corp este determinată de densitatea şi cantitatea de materie a acelui corp, el se învîrteşte într-un cerc vicios, deoarece densitatea se poate explica numai atunci cînd noţiunea de masă există dinainte. Problema capătă însă imediat un alt aspect dacă cele spuse mai sus nu sînt considerate ca o definiţie, ci ca o încercare de a lega noua noţiune de masă de alte noţiuni cunoscute din viaţa de toate zilele, noţiuni pe care le obţinem instinctiv. Fără îndoială că densitatea face parte din aceste noţiuni, deoarece un negru din Africa centrală nu s-ar încumeta să ridice un bolovan mare, în timp ce el ar transporta fără şovăială o bucată de lemn tot atît de mare. Este doar vorba de a aplica teoria în practică, adică de a pune de acord noile noţiuni cu observaţiile noastre.

După această călătorie îndepărtată în Africa, să rămînem mai bine în ţara noastră şi să ne urcăm pe Zugspitze[1]. Dacă de pe acel munte lăsăm să cadă o ladă în care se găseşte o bilă liberă, atunci, sub efectul gravităţii, atît lada cît şi bila vor cădea cu acceleraţia g, aşa cum rezultă din experienţele lui *Galileu*. Aceasta înseamnă că bila este în repaus faţă de ladă. Un om care s-ar găsi în interiorul lăzii ar trebui să tragă concluzia că asupra bilei nu acţionează nici o forţă. Trebuie deci să fim precauţi dacă vrem să utilizăm legea a doua a dinamicii. Pe pămînt acţionează forţa gravitaţională ; în lada care cade liber, face impresie că ea nu mai acţionează. Din această situaţie rezultă că nu este suficient să se spună că într-un caz dat acţionează o forţă, ci trebuie adăugat şi faţă de ce observator se consideră acţiunea forţei respective.

În consecinţă, nu este de loc indiferent locul de unde se face observaţia. *Galileu* a prezentat cu foarte mult efect legile căderii corpurilor în faţa profesorilor şi studenţilor

[1] Numele unui munte din Germania (*N. R.*)

universității din Pisa, lăsînd să cadă pe pămînt niște bile de la diferite etaje ale turnului înclinat din acel oraș*. *Galileu* nu și-a pus deloc problema, cum ar fi arătat legile căderii corpurilor așa cum le-a resimțit *Icar*. Pentru *Galileu*, pământul era socotit de la început ca punct de observație.

Fig. 22.

Noi însă știm astăzi că într-o ladă care cade, greutatea este complet anulată. Pe de altă parte, un parașutist ar face alte constatări. De aceea, pare îndreptățită întrebarea : care dintre acești observatori găsesc legile căderii corpurilor identice cu cele existente pe pămînt ? Deoarece greutatea unui corp este o forță ca oricare alta, întrebarea trebuie imediat generalizată : pentru care observator mecanica — nu numai căderea liberă a corpurilor — are același aspect, aceleași legi ca și pentru noi ?

Ultima întrebare provoacă o observație oarecum paradoxală. Să ne închipuim o ființă care ar fi capabilă să perceapă a milioana parte dintr-o secundă, ca și a mia parte dintr-un milimetru. Să punem această ființă să observe căderea liberă a unui corp. Ce va constata ? Va stabili că un corp nu cade niciodată vertical. Pe cît pare aceasta de necrezut, totuși lucrul este adevărat, deoarece pămîntul se învîrtește, iar corpul în cădere i-o ia înainte și cade astfel ceva mai spre răsărit (fig. 22). Datorită inerției, corpul își menține viteza de rotație mai mare, pe care a căpătat-o inițial în punctul de plecare. Deci, nici pămîntul nu este locul unde legile căderii corpurilor sînt pe deplin valabile. Atunci, unde sînt valabile aceste legi ?

Nici *Newton* și, după el, nici generații întregi de fizicieni n-au putut da un răspuns la această întrebare. Pentru a înlătura această întrebare, *Newton* a introdus noțiunea de spațiu absolut. Asupra acestei noțiuni s-a scris o literatură vastă, în care se găsește un amestec curios de observații înțelepte și subtilități. Cu toate străduințele enorme care s-au depus pînă în prezent, nu s-a găsit nici o ieșire

din impas. Spațiul absolut avea menirea să fie sediul unui observator anumit pentru care legile căderii corpurilor erau așa cum le-a formulat *Galileu* și oricît s-a încercat, nu s-a izbutit să se lămurească mai mult acest spațiu absolut. Pentru fizician, care se simte la fel ca un actor care într-o dramă în versuri ar apărea o singură dată și atunci numai pentru a-i da posibilitatea să spună o rimă deosebită, această situație este cu totul nesatisfăcătoare.

Se știa, desigur, că aceleași legi din mecanică vor fi valabile nu numai pentru un singur observator, ci pentru nenumărați observatori, anume pentru toți aceia care s-ar mișca uniform (față de observatorul plasat în spațiul absolut), așa cum se mișcă o barcă dusă de curentul unui rîu. Toți aceștia ar constata, fără excepție, aceeași accelerație și, implicit, aceleași forțe. Faptul că ei înșăși au viteze diferite nu are importanță, deoarece aci este vorba numai de variații ale vitezei.

Pasul hotărîtor îl constituie problema de a alege o anumită forță. Dacă s-a obținut acest lucru, atunci se apelează la observatori, care constată această forță așa cum a fost stabilită. Conform celor spuse mai înainte, acești observatori se mișcă între ei cu viteză constantă. Toți ceilalți observatori trebuie să constate forțe diferite. La observațiile acestora se vor suprapune forțe aparente, care rezultă din punct de vedere pur matematic din însăși starea lor de mișcare. O astfel de forță aparentă se constată la roata miraculoasă de la iarmaroc. Această forță face ca acela care se găsește pe această roată, cu toată osteneala pe care o depune cramponîndu-se de podeaua roții, să alunece mereu mai departe de centrul roții, pînă ce în sfîrșit ajunge pe sol. Acest lucru este datorit forței centrifuge.

Rămîne deci de rezolvat problema de a alege o forță anumită. Forța de atracție gravitațională pare creată special în acest scop, dacă se poate ajunge la analiza ei în mod obiectiv. Pasul hotărîtor făcut în această problemă aparține creațiilor nepieritoare ale lui Newton. El și-a dat seama că forța de atracție gravitațională este un caz special de forță de atracție, forță ce se exercită întotdeauna între corpuri. Dacă notăm cu M și m două mase pe care trebuie să ni le închipuim ca două puncte materiale și cu r distanța

dintre ele, atunci cele două mase se vor atrage între ele cu o forţă proporţională cu :

$$\frac{M \cdot m}{r^2}$$

Dacă un observator găseşte această valoare pentru forţa de atracţie, lucrul va fi confirmat de orice alt observator care se mişcă cu o viteză constantă faţă de primul observator. Toţi ceilalţi observatori vor constata valori diferite. Deci, primii observatori se caracterizează prin faptul că ei regăsesc pentru forţa de atracţie legea lui *Newton*. În felul acesta, dacă se aleg observatori în mod convenabil, se poate evita folosirea spaţiului absolut.

Astfel, pentru prima dată mecanica apare fără nici o pată. Simplitatea soluţiei expuse mai sus nu modifică cu nimic faptul că s-a lăsat atît de mult timp aşteptată. *Newton* o avea la îndemînă fără să-şi dea seama de acest lucru. De această dată, dificultatea nu consta în înţelegerea rezolvării, ci chiar în găsirea ei. În legătură cu aceasta, să mai arătăm cum se realizează alegerea de sisteme inerţiale pe cale pur statică. În acest scop, două mase egale se leagă fiecare cu cîte un arc, confecţionat fiecare din acelaşi material, egal de lungi şi care sînt astfel fixate, încît ambele mase să stea faţă în faţă.

Din cauza atracţiei, arcurile stau puţin întinse. În sistemele inerţiale, arcurile formează în fiecare loc două porţiuni egal de lungi ale unei drepte. O acceleraţie în direcţia liniei de legătură a celor două mase ar lungi arcul din faţă şi pe cel din spate l-ar scurta, iar o acceleraţie verticală ar face ca arcurile să formeze un unghi cu linia de legătură dintre cele două mase. Este evident că dispozitivul experimental trebuie să ni-l închipuim ca un sistem izolat.

Dacă arcul s-ar fixa cu posibilitatea de rotire la un capăt şi s-ar măsura lungimea lui în diferite poziţii, chiar şi un singur arc ar indica un sistem inerţial. Dacă însă am vrea să recurgem la o asemenea experienţă ca definiţie pentru sistemul inerţial, atunci împotriva acestei definiţii s-ar putea obiecta că ea nu mai este în concordanţă cu

noţiunile fundamentale, ci trebuie să se refere mai curînd la existenţa arcurilor.

Importantă este condiţia ca o experienţă imaginară să ducă în orice loc la acelaşi rezultat. În cazul indicat mai înainte, adică al unei lăzi care cade de pe vîrful unui munte, cele două mase — a lăzii şi a bilei conţinute în ladă — formează un sistem inerţial. Exact acelaşi rezultat s-ar obţine prin orice altă experienţă mecanică şi aceasta cu drept cuvînt, deoarece în interiorul lăzii există condiţiile dintr-un sistem inerţial. Totuşi, în contrast cu lada, aceste condiţii trebuie imaginate ca nemărginite în oricare direcţie. Aceasta conduce la considerarea maselor care produc cîmpul gravitaţional omogen în care cade lada. Se observă astfel că lada nu formează totuşi un sistem inerţial, pentru care fapt ar fi fost suficientă chiar şi o singură privire către vîrful muntelui de unde ne-am imaginat căderea lăzii.

Legea atracţiei corpurilor i-a permis lui *Newton* să generalizeze mecanica de pe pămînt pentru întregul cosmos. Aceasta a fost o creaţie aproape imposibil de întrecut. Legile mişcării planetelor, stabilite cu atîta trudă de *Kepler*, apar imediat ca o simplă consecinţă a legii atracţiei corpurilor. Acela care are noţiuni fundamentale de matematică superioară poate să deducă această lege în cîteva rînduri. Chiar numai din formularea legii atracţiei corpurilor se poate aprecia valoarea creaţiei lui *Newton*.

Valoarea descoperirilor lui *Newton* a fost recunoscută de la început şi mai tîrziu acesta a fost acoperit cu onoruri, cum nu s-a mai întîmplat vreunui cercetător. Atunci cînd baza operei sale principale a fost prezentată de către *Halley*, Academiei britanice de ştiinţe, aceasta a fost pe deplin convinsă de importanţa operei lui *Newton*. S-a scos la iveală faptul că numeroasele descoperiri cuprinse în această operă nu numai că au fost făcute de un singur om, dar au fost dezvoltate de el într-un timp scurt în aşa măsură, încît nu mai rămînea nimic de adăugat. Cu toate acestea, la şedinţa Academiei de ştiinţe nu a putut să lipsească şi o notă discordantă. După şedinţă, cînd ca de obicei academicienii s-au dus la o cafenea din apropiere, unul din ei, anume *Hooke*, a susţinut că cele mai importante dintre descoperiri se datoresc lui.

În anul 1705, regina Anna a Angliei l-a ridicat pe *Newton* la rangul de cavaler, astfel că de atunci înainte el s-a numit Sir *Isaac Newton*. Academia britanică de ştiinţe îl alesese cu doi ani înainte ca preşedinte, fiind ales din nou în fiecare an şi rămînînd în acest post pînă la sfîrşitul vieţii. În felul acesta, *Newton* a domnit singur pe tărîmul ştiinţific al Angliei, avînd Academia britanică de ştiinţe ca parlament. Numai aşa i-a fost posibil lui *Newton* să-l critice pe *Leibniz* într-un mod care aruncă o umbră asupra caracterului său, în disputa referitoare la cine trebuie considerat drept descoperitorul calculului infinitezimal. Acest fapt trebuie însă privit cu o circumstanţă atenuantă prin faptul că în această dispută *Newton* a fost influenţat.

După moartea sa, în anul 1727, *Newton* a fost înmormîntat în catedrala Westminster. La înmormîntare, capetele giulgiului mortuar au fost ţinute de primul ministru, de ducii *Roxbourgh* şi *Montrose*, de conţii *Pembroke*, *Sussex* şi *Macclesfield*, toţi membri ai Academiei de ştiinţe. În anul 1731, pe mormînt i s-a ridicat un monument cu inscripţia : „Aci se odihneşte Sir *Isaac Newton*, acela care, cu o putere spirituală aproape divină, a determinat primul, prin formule matematice descoperite de el, mişcarea şi forma planetelor, drumul cometelor şi fluxul mărilor, diversitatea razelor luminoase, ca şi particularităţile culorilor produse din cauza acestei diversităţi, fapte care înaintea lui nu fuseseră nici măcar bănuite de cineva, acela care a cercetat natura, care a explicat cu perspicacitate şi cu siguranţă istoria ca şi scrierile sfinte, acela care a arătat prin filozofia sa majestatea spiritului suprem şi care a trăit respectînd preceptele morale. Toţi muritorii trebuie să se felicite că au avut parte de o asemenea podoabă a geniului omenesc".

Ideea lui *Newton* de a presupune existenţa unei forţe care se exercită fără mediu material direct între două corpuri, prin vid, nu era numai deosebit de îndrăzneaţă, ci în acelaşi timp atît de stranie, încît însuşi *Newton* a căutat o explicaţie. *Newton* recunoştea într-adevăr că nu se ocupă cu inventarea de ipoteze — „hypotheses non fingo" sînt chiar cuvintele lui ; totuşi, după cum reiese din corespondenţa sa, nu era liniştit în această problemă. Într-adevăr, introducerea de forţe care să acţioneze de la distanţă este de o îndrăzneală nemaipomenită. În viaţa obişnuită, la pîrghie,

palan sau oricare altă mașină, forțele se transmit de la o piesă la alta. Deodată apare o forță care acționează fără nici un intermediu. Din această cauză, și în cazul gravității s-a încercat să se găsească o comportare asemănătoare, adică s-a căutat să se explice gravitația. Cînd însă acest lucru nu a reușit, spiritele s-au liniștit, iar gravității i s-a atribuit calitatea de „a fi evidentă".

La prima vedere, încercarea de a declara gravitația ca evidentă apare ca o manevră grosolană de transformare prin cuvinte pompoase a ceva nereușit, într-un succes. Dacă ne gîndim însă mai bine, ajungem la o altă concluzie. Se constată că prin reflectări îndelungate, anumite noțiuni devin treptat „evidente", numai dacă acestora li se atribuie o interpretare largă. Astfel, nu numai că ne-am obișnuit cu problema „atracției", ci ne-am însușit-o într-atîta în ideile noastre, încît astăzi ne apare de neînțeles cum pe vremuri această lege și consecințele ei minunate nu au fost imediat recunoscute. A fost nevoie de un *Voltaire* pentru ca mecanica cerească a lui *Newton* — căci despre aceasta este vorba în primul rînd — să obțină un succes rapid pe continentul Europei. *Voltaire* a luat cunoștință de ideile lui *Newton* în timpul exilului său petrecut la Londra și, reîntors în Franța, a început să pledeze în favoarea acestor idei, combătînd totodată părerile compatriotului său, *Descartes*.

Măreția creației lui *Newton* constă în faptul de a-și fi dat seama că, atît pe pămînt cît și în univers, fenomenele sînt determinate de aceleași legi. Datorită aceleiași legi a atracției maselor, un măr cade din pom și pămîntul se mișcă pe o elipsă în jurul soarelui. Astfel, cerul nu mai ascundea minuni, ci numai probleme. De demult omenirea s-a preocupat cu una din aceste probleme și anume de legătura ce există între mișcarea lunii și fenomenul de flux și reflux. Pentru acela care-l vede pentru prima oară, acest fenomen produce o impresie de neuitat, după cum reiese din raportul lui *Curtius Rufus* privind faptele lui Alexandru cel Mare :

„Cînd soldații lui Alexandru cel Mare au ajuns pe o insulă situată în mijlocul fluviului Indus, ceva mai încet, deoarece fuseseră împinși înapoi din cauza fluxului, au ancorat flota și s-au răspîndit pentru a căuta hrană, fără să bănuiască întîmplarea care urma să-i surprindă. Era în jurul orei a treia, cînd oceanul începu să înainteze în miș-

carea obișnuită a fluxului și să împingă înapoi apele fluviului. Întîi formînd un baraj, apoi, împins cu putere înapoi, fluviul începu să curgă cu mare putere în direcție contrară, sub forma unor torente ce se prăvăleau în albia fluviului. Soldaților lui Alexandru nu le era cunoscută natura oceanului și priveau această manifestare ca o minune și un semn al mîniei divine. Cu o presiune mereu crescîndă, marea se revărsa chiar și pe cîmpiile care cu puțin timp înainte fuseseră uscate. Deodată vasele au fost ridicate în sus și întreaga flotă fu împrăștiată, cînd cei debarcați la țărm de pe vase alergară înapoi din toate părțile, speriați și îngroziți de nenorocirea venită pe neașteptate. Însă la zăpăceală, graba nu ajută cu nimic. Unii împingeau vasele spre țărm cu rărgi, alții se împotmoliseră împiedicînd pregătirea vîslelor. Cîțiva, în graba lor de a porni de la țărm, nu au așteptat pe vîslași, astfel că de-abia puteau mișca vasele paralizate și necîrmite; alte vase nu putuseră lua pe cei care încercaseră să se urce în ele, astfel că erau în același timp prea pline, iar, pe de altă parte, le lipsea echipajul care să le conducă. Pe de o parte, țipetele ca să fie așteptați cei ce lipseau, pe de altă parte, țipetele celor care voiau să pornească de la țărm și strigătele contradictorii ale celor care nu voiau același lucru luaseră orice posibilitate de a vedea sau de a auzi. Nici chiar cîrmacii nu puteau fi de folos, strigătele lor neputînd fi auzite de mulțimea gălăgioasă și comenzile lor nefiind luate în seamă de mulțimea speriată și zăpăcită. Din această cauză, corăbiile începură să se ciocnească între ele, să-și rupă pe rînd vîslele și să se înghesuie una în alta. Se putea crede că nu era flota unei aceleiași armate, ci două flote diferite aflate într-o luptă navală. Provele unora din corăbii loveau pupele altora, cei care provocaseră zăpăceala celor din fața lor erau la rîndul lor înghesuiți de cei din urma lor și astfel mînia celor ce se certau ajunse pînă la bătaie.

Fluxul acoperise cu apă întreaga cîmpie în jurul fluviului, astfel că numai colinele se mai înălțau deasupra apei ca niște mici insule; în spaima lor, mulți se grăbeau să ajungă la ele înot, după ce renunțaseră la orice speranță de a fi primiți pe corăbii. O parte din flota împrăștiată se găsea în apa adîncă adunată acolo unde erau văi, iar altă parte se găsea în ape puțin adînci, după cum valurile aco-

periseră ridicăturile neregulate ale terenului, cînd deodată îi cuprinse o nouă teamă şi mai mare. Apa oceanului începu să se retragă, scurgîndu-se în albia ei în şiruri lungi de talazuri, astfel încît cîmpia, aflată scurt timp înainte adînc scufundată sub fluxul de apă sărată, apărea din nou la suprafaţă. Atunci corăbiile nemaiplutind, unele se răsturnară peste prova lor, altele, peste bord ; cîmpia era acoperită cu bagaje, arme, bucăţi de scînduri şi vîsle rupte. Soldaţii nu îndrăzneau nici să debarce, nici să rămînă pe corăbii, aşteptînd mereu alte întîmplări, mai grozave decît cele petrecute. Aproape că nu credeau ceea ce văzuseră, vase naufragiate pe uscat şi în fluviu, un ocean. Şi nu se vedea nici un sfîrşit al nenorocirii lor, deoarece ei nu ştiau că în scurt timp fluxul va aduce înapoi apa şi va repune corăbiile pe linia de plutire ; de aceea, începură a prevesti foamete şi nenorociri şi mai mari. În jurul lor se tîrau, încoace şi încolo, animale îngrozitoare, lăsate de valurile oceanului.

Începuse să se înnopteze şi însuşi regele Alexandru era foarte îngrijorat cu privire la salvarea soldaţilor săi. Totuşi, graţie curajului său de nebiruit, grijile nu îl copleşiră, ci rămase de veghe neclintit întreaga noapte, trimiţînd călăreţi la gura fluviului pentru ca să anunţe din vreme îndată ce vor vedea din nou înaintarea oceanului. El a dat de asemenea ordin să se repare corăbiile deteriorate şi să se ridice cele răsturnate, pentru a fi pregătiţi atunci cînd pămîntul ar fi din nou inundat de ape. După ce Alexandru şi-a petrecut astfel întreaga noapte veghind şi îndemnînd, veniră în grabă călăreţii trimişi în cercetare şi după ei urmă tot atît de repede şi fluxul. La început apa venind încet, ridică corăbiile ; curînd însă inundînd întreaga cîmpie, puse şi flota în mişcare. De pe întreaga coastă şi de pe maluri răsunară aplauzele soldaţilor, iar marinarii sărbătoriră salvarea lor nesperată printr-o bucurie fără margini. De unde s-au întors deodată aceste ape mari ale oceanului, se întrebau ei miraţi ? Încotro au dispărut ele cu o zi înainte? Care era cauza acestui fenomen care părea în acelaşi timp contradictoriu şi totuşi supus unei legi periodice ? Deoarece din felul cum s-a petrecut fenomenul regele a tras concluzia că acesta se produce după apusul soarelui, el plecă cu cîteva corăbii în josul fluviului imediat după miezul nopţii, pentru

a o lua înainte fluxului, şi cînd trecu de gura fluviului, dornic de a ajunge la ţelul dorinţelor sale, navigă încă 400 de stadii în largul oceanului. Apoi aduse ofrande zeilor oceanului şi acelor ţinuturi şi se întoarse înapoi la flota sa".

Secretul mareelor, adică a fluxului şi refluxului, îşi

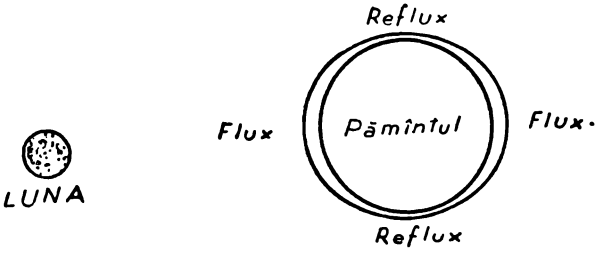


Fig. 23.

găseşte explicaţia în atracţia lunii, în legea atracţiei universale (fig. 23). Atracţia lunii determină aceeaşi acceleraţie pentru toate punctele materiale ale corpurilor solide de la suprafaţa pămîntului, nu însă şi pentru particulele mobile din care este alcătuită apa. Punctele materiale de pe globul pămîntesc care se găsesc îndreptate spre lună, din cauza atracţiei acesteia, sînt supuse la o acceleraţie mai mare, deoarece sînt mai aproape de lună. Particulele de apă de pe cealaltă parte a globului sînt supuse, în mod corespunzător, la o acceleraţie mai redusă, deoarece sînt mai departe de lună. Acceleraţia mai mare înseamnă că particulele de apă o iau întrucîtva înaintea pămîntului; în acest caz, pe partea pămîntului dinspre lună este flux. Acceleraţia mai mică înseamnă că particulele de apă de pe cealaltă parte a globului rămîn puţin în urmă, deci şi pe partea opusă lunii este flux. Atît într-un caz cît şi în celălalt, atracţia pămîntului este aceea care împiedică particulele de apă să părăsească pămîntul.

Dacă se calculează forţa de atracţie a lunii pe suprafaţa pămîntului, se obţine pentru aceasta o valoare foarte redusă. Atunci cum se poate ca o forţă atît de redusă să provoace acest spectacol al naturii, fluxul şi refluxul? S-ar părea că teoria ne-a indus în eroare. Şi totuşi ea are dreptate. Această forţă redusă acţionează timp îndelungat şi anume

continuu. Ea se comportă la fel ca şi un leagăn, pe care îl putem face să oscileze cu ajutorul unor impulsuri foarte mici, în cazul de faţă fiind vorba de un leagăn de dimensiuni cu adevărat cosmice.

Din exemplul mareelor se vede clar cum concepţiile lui *Newton*, care fac astăzi parte din mecanica clasică, permit explicarea fenomenelor atît în univers cît şi pe pămînt. Prin aceasta ele întrec cu mult tot ceea ce se crease înainte, în special în domeniul astronomiei, deoarece predecesorii lui *Newton* observaseră şi explicaseră corect multe lucruri, însă cauza acestor fenomene, atracţia universală, rămăsese necunoscută. Din această cauză, ei n-au putut să depăşească stadiul unor ipoteze care erau mai mult ingenioase decît convingătoare şi, deci, este uimitor cum au putut, totuşi să anticipeze în multe probleme.

Dacă se priveşte evolutiv calea care a dus la o mecanică atît de creatoare, se constată că adevărurile fundamentale nu pot fi analizate niciodată izolat. Prin nici un dispozitiv nu se poate realiza ca o singură forţă să acţioneze asupra unui punct material. Acesta este supus în acelaşi timp şi atracţiei tuturor corpurilor din univers şi numai pentru că majoritatea acestor forţe sînt slabe, putem stabili cu destulă aproximaţie legile căderii corpurilor.

Ceea ce se poate confirma prin observaţii exacte sînt întotdeauna mişcări complexe. Numai datorită imperfecţiunii simţurilor noastre percepem fenomenele simplificate. La această concluzie ne duce teoria, care caută să se justifice prin observaţii corespunzătoare şi care, dacă vrem să fim consecvenţi pînă la sfîrşit, trebuie să admitem, totuşi, că sînt întotdeauna insuficiente şi imperfecte. Aceasta înseamnă că teoria ne condamnă să ne mulţumim numai cu figuri deformate pe care nu le prezintă ca fiind realităţi.

O altă teorie ar putea să ducă la o „realitate" mai mult sau mai puţin aproximativă. Toate aceste realităţi sînt de fapt construcţii ale minţii sau convenţii, care însă nu trebuie să fie în contradicţie cu realitatea pe care o percepem cu simţurile, aceasta constituind singura restricţie căreia trebuie să se supună toate aceste teorii. În primul moment, această formulare pare foarte decepţionantă. Dacă însă ne gîndim că orice teorie trebuie să reprezinte cunoştinţe ce pot fi aplicate practic, atunci lucrurile capătă o

altă înfățișare, ezitările chinuitoare ale filozofiei dispar și fac loc unei științe creatoare a fizicii.

Un fizician perspicace, ca *Ernst Mach*, era de părere că : „Rezultatul cel mai important al raționamentelor noastre este acela că tocmai acele legi mecanice care par cele mai simple sînt de o natură foarte complicată, că aceste legi se bazează pe cunoștințe incomplete, ba chiar pe cunoștințe care nu pot fi niciodată completate, că, pe de o parte, din punct de vedere practic aceste legi sînt suficient de sigure pentru ca să servească ca bază deducțiilor matematice, însă, pe de altă parte, ele însăși nu pot fi privite în nici un caz ca niște adevăruri matematice definitive, ci mai mult ca niște legi care nu numai că pot fi supuse unui control experimental neîntrerupt, ci chiar necesită neapărat acest control". Aceste cuvinte sînt scrise în lucrarea sa din anul 1883 „Despre mecanică și evoluția ei".

La început, lumea își dădea prea puțin seama de locul și importanța mecanicii. Mecanica reprezenta ramura cea mai veche a științelor naturii și era cel mult privită ca model. Din acest punct de vedere se poate înțelege de ce s-a mers chiar pînă acolo, încît pentru explicarea fizicii, se recurgea de obicei la mecanică. *Descartes* era de părere că nu există nici o problemă de fizică care să nu poată fi rezolvată prin mecanică. Diferitele lui încercări în acest sens au arătat însă că el credea să fi atins acest țel pe baza unor noțiuni insuficiente și nesigure, fapt de altfel constatat de contemporanii săi *Pascal* și *Huygens*. Pe atunci se recurgea destul de des la interpretări teologice, care însă nu aveau nimic comun cu fizica.

Pe cît de clară ni se pare nouă astăzi această ultimă observație, au fost necesare totuși eforturi mari pentru atingerea acestei obiectivități. Un secol și jumătate după *Newton*, Napoleon, protector al științelor naturii, ar fi criticat faptul că în mecanica cerească a lui *Laplace* nu a găsit numele lui dumnezeu. La aceasta savantul a răspuns : „Majestate, nu am avut nevoie de această ipoteză". Ar însemna însă să fim nedrepți față de savanții din secolele trecute dacă am voi să-i condamnăm din această cauză. Dimpotrivă, nu putem să-i prețuim suficient că

au fost în stare, în ciuda influenței teologiei, să ajungă la rezultatele obținute.

Astăzi ne dăm ușor seama că științele naturii din secolul trecut nu au fost cercetate suficient de obiectiv. Ele nu au avut grijă în suficientă măsură să admită în cadrul lor numai acele noțiuni care le aparțineau de fapt. Punctele de vedere teologice care au fost luate în considerație dovedesc acest lucru cu prisosință. Chiar și pe un *Galileu* l-a preocupat explicația minunii lui *Josua*. Din păcate, chiar și astăzi în științele naturii se mai găsesc unele rămășițe teologice.

Să dăm un exemplu. În sensul mecanicii lui *Newton*, mișcarea unui corp este determinată în fiecare moment dacă sînt cunoscute forțele care acționează asupra lui, locul unde se găsește corpul și viteza acestuia la un anumit moment. *Laplace* exprimă acest lucru în felul următor : „Un spirit care ar cunoaște pentru o clipă toate forțele care acționează în natură, precum și pozițiile reciproce ale tuturor părților ei componente ar trebui, dacă ar fi destul de cuprinzător pentru a putea supune toate aceste date unei analize matematice, să cuprindă în aceeași formulă atît mișcarea corpurilor cerești, cît și mișcarea celui mai ușor atom ; nimic nu ar fi nesigur pentru acest spirit, iar viitorul și trecutul ar sta deschise în fața ochilor săi".

În această concepție este vorba despre determinism, adică despre evoluția determinată a tuturor fenomenelor sau despre legătura dintre cauză și efect, despre cauzalitate. Acest cuvînt ascunde însă un pericol. El este folosit și în filozofie și, în acest caz, deseori în opoziție cu liberul arbitru.

Trebuie să ne ocupăm de încă o noțiune, care este tot atît de importantă ca și noțiunile fundamentale din mecanica clasică (spațiu, timp și masă), și anume de energie. Omul modern este obișnuit să exprime totul în energie. Astăzi apare evident că mașinile noastre transformă energia dintr-o formă în alta : energia este o artistă în arta transformării la tramvaie, energia electrică, la locomotive, energia calorică se transformă în energie de mișcare. Acest fel de gîndire nu datează însă de mult, fiind introdus de-abia de un secol. Desigur că și mai înainte unii cercetători au utilizat raționamente asemănătoare, însă mai mult instinctiv, mărginindu-se mai mult la domeniul mecanicii.

Cu toate că energia reprezintă o noțiune fundamentală, nu este de loc ușor să-i dăm o definiție concisă. Poate că cel mai nimerit lucru este să se spună că energia este posibilitatea de a produce lucru mecanic. Un exemplu am amintit mai sus, atunci cînd am vorbit despre forța de gravitație. Dacă ridicăm un corp greu la o anumită înălțime, trebuie să cheltuim lucru mecanic; astfel, energia acestui corp — mai bine spus, energia potențială sau de poziție — se mărește cu acest lucru mecanic. Invers, dacă corpul se întoarce în punctul inițial situat mai jos, cedează din nou același lucru mecanic. Acest lucru mecanic este furnizat pe seama energiei potențiale a corpului.

Este de observat că în acest caz nu are nici o importanță drumul parcurs de corp din poziția inițială în cea finală. Fie că ridicăm vertical corpul, fie că îl mișcăm încet în sus pe un plan înclinat, lucrul mecanic produs — deci cîștigul de energie — depinde întotdeauna numai de diferența de înălțime dintre poziția inițială și cea finală. În acest caz se vorbește despre „forțe conservative". Forța de atracție gravitațională, forța de atracție electrică și alte forțe fac parte din grupul de forțe conservative. Din punct de vedere pur matematic, în acest caz se poate introduce o mărime determinată, care are o anumită valoare pentru un anumit punct din spațiu; această mărime se numește potențial și este o măsură pentru energia potențială și anume: diferența de potențial dintre două puncte este proporțională cu lucrul mecanic care se cheltuiește pentru a deplasa un corp între cele două puncte.

Există încă o a doua formă de energie mecanică: energia cinetică sau de mișcare. Fiecare din noi știe că un corp care se mișcă repede, de exemplu un glonț de pușcă, datorită vitezei lui, poate face un lucru mecanic de distrugere apreciabil. Desigur că pe vremuri a fost greu să se găsească expresia matematică corectă pentru energia cinetică; asupra acestei probleme s-a dezlănțuit chiar o puternică divergență între învățați, divergență care a avut loc numai datorită faptului că ambele tabere foloseau aceleași nume pentru lucruri diferite. Astăzi energia cinetică se măsoară prin jumătatea produsului dintre masa și pătratul vitezei unui corp:

$$E = \frac{1}{2} mv^2.$$

Această valoare rezultă printr-un calcul simplu din definiția dată mai înainte pentru lucru mecanic, folosindu-se pentru forță valoarea ei din legea a doua a Dinamicii.

Variația energiei cinetice este egală cu lucrul mecanic efectuat. Dacă la energia cinetică se adaugă și energia potențială, suma aceasta nu se schimbă, după cum rezultă chiar din motive pur matematice : suma energiei potențiale și energiei cinetice rămîne neschimbată. Deci dacă o bilă se rostogolește pe un plan înclinat și energia ei cinetică crește, atunci energia ei potențială trebuie să scadă.

În cadrul ultimelor noastre raționamente, ne-am referit în mod repetat la motive matematice. Deoarece noi nu sîntem dogmatici, să explicăm acum mai amănunțit aceste motive, căci numai cînd sîntem în stare de a înțelege cel puțin principiul raționamentelor matematice necesare, se poate vorbi despre o adevărată înțelegere a problemei. În plus, aceste raționamente sînt interesante și nu mai apar astăzi ca o formulă magică, datorită lămuririi noțiunii de valoare limită care stă la baza lor. Numai astfel se explică faptul că aceste probleme matematice se învață astăzi în școală, în timp ce în secolele trecute chiar și învățații întîmpinau dificultăți în această direcție. De aceea, se recomandă să scoatem în evidență ideile conducătoare, fără să ne preocupăm de formule.

CALCULUL INFINITEZIMAL, ADEVĂRATĂ VRĂJITORIE

O dată cu *Galileu* și cu *Newton*, pentru fizică începe o epocă în care calculele de matematici superioare devin absolut necesare. Noțiunile fundamentale nu sînt mai puțin clare decît cele din statică; în schimb, sînt mult mai complicate. Matematica elementară nu mai este suficientă, ci trebuie să se recurgă la calculul diferențial și integral, pe scurt, la calculul infinitezimal. Pe vremea lui *Galileu* acest calcul nu exista încă, și tocmai din această cauză el nu a reușit să-și desăvîrșească un raționament fundamental și să explice accelerația într-o formă generalizată, pentru a putea formula astfel legea a doua a dinamicii. Ceea ce lipsea încă desigur că *Galileu* l-ar fi creat, deoarece în introducerea la dinamică am descris drumul care depășea numai cu un pas

raționamentul lui *Galileu* și care ducea la noțiunea încă nestabilită de masă și aceasta numai cu ajutorul matematicii elementare. Pare paradoxal că *Galileu*, care a formulat legile căderii corpurilor, nu cunoștea noțiunea de masă. Aceasta se explică, totuși, prin faptul că *Galileu* se preocupa de punctele materiale luate individual ; masa se evidențiază însă numai atunci cînd sînt observate simultan mai multe puncte materiale.

Demn de remarcat este faptul că ideea unui calcul infinitezimal nu a pornit din mecanică, cu toate că mecanica nu poate exista fără acest calcul, ci chiar din matematică. După cum s-a petrecut și mai tîrziu, fizica a profitat : teoria relativității a găsit prezentă geometria lui *Riemann*, iar mecanica cuantelor, calculul operațional. În această situație trebuie văzută mai puțin o „armonie prestabilită" și mai curînd motivul că se pot utiliza numai noțiuni existente. Relațiile din domeniul fizicii sînt de natură matematică, putînd fi înțelese numai în măsura în care matematica pern ite această înțelegere.

Începuturile matematicii superioare datează de mult. *Arhimede*, cel mai însemnat matematician din antichitate, rezolva integrări, fapt stabilit din scrisorile sale. Totuși, în scrierile publicate el a ales o reprezentare care era mai potrivită timpului său. Din această cauză, crearea calculului infinitezimal nu a primit nici un impuls din partea lui *Arhimede*. Numai cu mult mai tîrziu au apărut raționamente, care pot fi privite ca începuturile calculului infinitezimal.

Calculul infinitezimal începe o dată cu introducerea cuvîntului „indivizibil", care a fost formulat în secolul al XIV-lea de către *Bredwardin*, arhiepiscop de Canterbury. Evident că s-ar căuta zadarnic o explicație mai amănunțită în scrierile acestui arhiepiscop, cu toate că se numea „Doctor profundus". Pe atunci, atribuirea unor astfel de titluri de onoare se făcea cu dărnicie. Și pentru a indica numai două exemple, *Thomas de Aquino* era numit „doctor universalis" și *Raimundus Lullus*, care voia să găsească o mașină de raționat, fără ca el însuși să fi fost în stare să raționeze just — sau poate tocmai de aceea —, se numea „doctor illuminatus".

Cuvîntul indivizibil a fost după aceea reluat de italianul

Cavalieri, care leagă de el raţionamente ce pot fi urmărite pînă în anul 1626. La 21 martie din acel an, *Cavalieri* îi scrie lui *Galileu* despre acest lucru. Din scrisoare reiese că însăşi *Galileu* a făcut raţionamente analoge. A durat însă mult timp pînă ce *Cavalieri* a publicat o lucrare asupra acestui subiect. Această lucrare a apărut prima dată în anul 1635, apoi într-o ediţie îmbunătăţită în anul 1653. Un critic francez şi-a exprimat părerea că această lucrare ar merita „un premiu al confuziei", dacă s-ar atribui astfel de premii. Aceasta se datoreşte probabil faptului că *Cavalieri* voia să integreze, fără a fi însă în situaţia de a putea explica, calculul integral. Să încercăm să explicăm această problemă, amintindu-ne că problema fundamentală a calculului integral este determinarea suprafeţei figurilor plane sau a volumului corpurilor (fig. 24).

Să privim o figură plană, cu un contur oarecare, care poate fi format atît din linii drepte cît şi din linii curbe. Să ne închipuim această figură desenată pe o foaie de hîrtie. Dintr-un colţ al foii de hîrtie se deplasează mereu paralel cu ea însăşi o dreaptă, lucru ce se poate uşor realiza cu ajutorul a două rigle. La început dreapta trasată şi figura sînt separate. Există apoi o poziţie în care dreapta mobilă are pentru prima dată puncte comune cu figura.

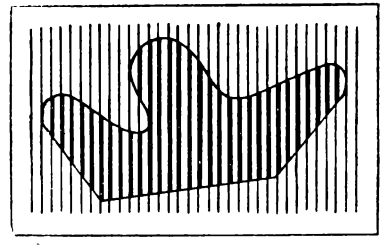


Fig. 24.

Aceste puncte determină una sau, dacă figura are concavităţi, mai multe distanţe separate. Fiecare punct trebuie considerat ca reprezentînd o distanţă. Dacă dreapta mobilă se deplasează încă mai departe, atunci cîtva timp ea are porţiuni comune cu figura. Continuînd deplasarea, ajungem pentru a doua oară la o poziţie în care dreapta mobilă mai are porţiuni comune cu figura, însă la cea mai mică nouă deplasare nu mai are nici o porţiune comună. Între aceste două poziţii extreme există o mulţime infinită de drepte, care au porţiuni comune cu figura.

Fiecare desen haşurat prezintă o adevărată colecţie de modele de asemenea porţiuni. Între două linii trasate mai există încă o mulţime infinită de alte drepte cu porţiuni comune. Toate aceste drepte formează împreună „totalitatea„ de la care porneşte *Cavalieri*. Probabil că aceste drepte trebuie să fie ele însele aşa-numitele indivizibile. În această privinţă sîntem reduşi numai la bănuieli, deoarece *Cavalieri* nu explică nicăieri sensul cuvîntului indivizibil. *Cavalieri* procedează în mod asemănător şi cu corpurile pe care le descompune cu ajutorul unor planuri paralele. *Cavalieri* spune apoi : „Pentru a cunoaşte raportul dintre două figuri plane sau spaţiale, este suficient a găsi raportul totalităţii lor. Acesta este fundamentul pe care îl pun la baza acestei noi geometrii create de mine".

Acest fundament nu era o stîncă, ci un nor care, privit din apropiere, se volatiliza. Cu toate că *Cavalieri* a reuşit să obţină rezultate juste, el trebuie să fi avut senzaţia unuia care utilizează o maşină de calculat fără să-i priceapă mecanismul. Totalităţile dau astăzi posibilitatea de a forma integrale definite, fără însă a fi de loc identice cu acestea, deoarece numai noţiunea de limită, pe care *Cavalieri* nu o cunoştea, duce de la totalitate la integrală. Putem să ne închipuim o figură ca fiind compusă din beţe de chibrit aşezate strîns unul lîngă altul şi că acestea devin din ce în ce mai subţiri (fig. 25). Un exemplu va uşura înţelegerea acestui lucru. La început, să ne închipuim beţele de chibrit aşezate aşa după cum se arată în figura 25, stînga. După aceasta, fiecare băţ de chibrit aşa după cum reiese din figura 25, dreapta. În acest fel, se observă imediat că ambele patrulatere au aceeaşi suprafaţă.

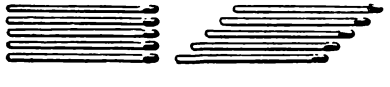


Fig. 25.

Raţionamentul descris mai sus se deosebeşte totuşi de acela al lui *Cavalieri* şi se apropie de cel al lui *Kepler*, care publicase în anul 1615 o lucrare, considerată ca începutul matematicilor superioare. Cu toate că această lucrare era extrem de importantă, *Kepler* nu a găsit nici un editor care să i-o tipărească, astfel că nu-i rămăsese altceva de făcut decît s-o tipărească pe cont propriu. O soartă ase-

mănătoare au avut-o de-a lungul veacurilor şi alte lucrări foarte importante. Motivul cercetărilor lui *Kepler* l-a dat anul recoltei excepţionale de vin din Austria, anul 1612. Pe cînd *Kepler* cumpăra de acolo cîteva butoaie de vin, a observat că vînzătorul determină mult mai simplu capacitatea acestora decît ştia *Kepler* că se face în Renania. O meditaţie de trei zile i-a permis lui *Kepler* să stabilească calculul exact al capacităţii butoiului.

Kepler şi-a închipuit figurile împărţite în fîşii înguste. Deoarece el nu cunoştea noţiunea strictă de limită, a trebuit să ocolească trecerea la limită. El realiză aceasta prin alegerea unor fîşii infinit de mici. Evident că se caută zadarnic la *Kepler* o explicaţie exactă pentru ceea ce trebuie să se înţeleagă prin noţiunea „infinit de mic". El utilizează însă cu îndemînare comportarea mărimilor infinit de mici, pentru a obţine rezultate referitoare la mărimi finite şi anume la volume. Nu ar avea sens dacă voind să ne convingem de importanţa acestei metode l-am urmări pe *Kepler* în raţionamentul său. Pare cu mult mai indicat să transpunem într-o formă modernă raţionamentul lui *Kepler*. În acest caz, se constată că raţionamentul se desfăşoară în cadrul ideilor lui *Arhimede*. Trebuie însă mai întîi definit înţelesul volumelor „curbe" la figurile finite, ceea ce se poate realiza cu ajutorul unor figuri potrivite, la care apoi se face trecerea la limită.

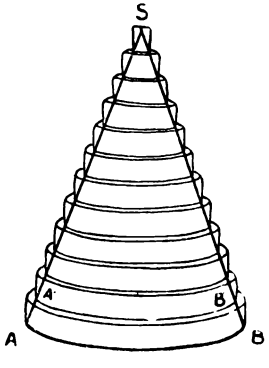


Fig. 26.

Să ne închipuim un con tăiat paralel cu suprafaţa bazei, într-un număr de n felii, egal de groase, Cu cît numărul n este mai mare. cu atît vor fi mai subţiri feliile (fig. 26). Matematicienii înseamnă de preferinţă mărimile care devin din ce în ce mai mici cu litera ε din alfabetul grec. Să ne alăturăm acestora şi să însemnăm grosimea feliilor cu ε. Să determinăm acum volumul fiecărei felii. Acesta este aproximativ egal cu volumul cilindrilor, care au suprafaţa de bază şi înălţimea fiecărei felii. Aproximaţia este cu atîtmai mică, cu cît sînt mai subţiri

feliile. De aci înainte să ne închipuim feliile înlocuite prin aceşti cilindri. La început, trebuie determinată raza fiecărui cilindru. Al m-lea cilindru, considerat din vîrful conului, se află între două planuri care sînt la o distanţă de vîrful conului de $(m - 1)\ \varepsilon$ şi $m\ \varepsilon$. Să însemnăm ultimul plan cu $A'B'$ şi acela al suprafeţei de bază a conului cu AB, iar vîrful conului cu S. De aci rezultă că triunghiurile SAB şi $SA'B'$ sînt asemenea. Pentru raza căutată rezultă valoarea :

$$\frac{r}{h}\, m\ \varepsilon,$$

unde r este raza suprafeţei de bază a conului şi h înălţimea conului. Acest cilindru are deci volumul :

$$\left(\frac{r}{h}\, m\ \varepsilon\right)^2 \pi\ .\ \varepsilon.$$

Pentru ε se poate pune valoarea $\frac{h}{n}$, astfel că volumul cilindrului se mai poate scrie :

$$r^2 h\pi\, \frac{m^2}{n^3}.$$

Pentru a stabili volumul conului, trebuie adunate toate volumele cilindrilor, deci conform formulei anterioare, trebuie înlocuit consecutiv m cu valorile 1, 2, ... n şi apoi adunate. Dacă se scoate din paranteză factorul comun, rezultă :

$$r^2 h\pi \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2).$$

Această expresie se poate transforma. Pentru aceasta se porneşte de la ecuaţia

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

care fiind valabilă pentru n, se poate uşor calcula şi pentru $n + 1$ şi deci este valabilă în general. Din aceasta rezultă imediat

$$\frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\ .$$

Dacă feliile tăiate din con devin din ce în ce mai subţiri, atunci numărul n creşte nelimitat. În acest caz, al doilea

şi al treilea termen din partea dreaptă a ultimei formule devin oricît de mici. Deci termenul din dreapta al egalităţii tinde către valoarea 1/3. Cu această valoare trebuie înmulţit $r^2h\pi$, rezultînd volumul conului :

$$\frac{1}{3}r^2h\pi.$$

Din raţionamentul făcut mai sus rezultă valoarea exactă a volumului conului, evitîndu-se utilizarea mărimilor infinit de mici. Aceste mărimi, însă, au adus la vremea lor servicii de netăgăduit. Oamenii de ştiinţă s-au obişnuit foarte repede să privească figurile ca o reunire de mărimi infinit de mici. O linie curbă era privită ca fiind alcătuită dintr-o infinitate de segmente foarte mici. Direcţia unei drepte infinit de mici este dată de tangenta curbei în punctul respectiv. Această direcţie — şi nu însăşi dreapta infinit de mică, după cum se crede de obicei — formează apoi cu direcţiile axelor unui sistem de coordonate dreptunghiulare un triunghi, care a fost numit de *Pascal* şi *Leibniz* „triunghi caracteristic". În acest triunghi nu are importanţă mărimea laturilor, ci numai raportul dintre ele. De aceea, în locul triunghiului caracteristic poate fi luat orice alt triunghi asemenea. *Pascal* şi *Leibniz* s-au decis pentru triunghiul desenat în figura 27, care este format din normala curbei, axa absciselor şi axa ordonatelor.

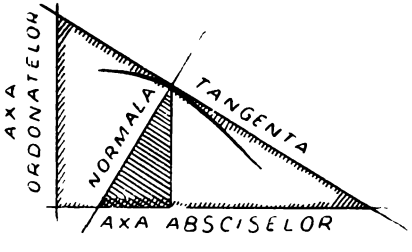


Fig. 27.

Pentru a rezolva problemele noii matematici, ambii învăţaţi au recurs mereu la acest triunghi. Aci putem aminti care este problema fundamentală a calculului diferenţial şi anume : fiind dată o curbă oarecare, să se determine direcţia tangentei în fiecare punct al acestei curbe. Acesta este un mod fericit de a privi lucrurile, dacă ne gîndim că în acel timp noţiunile de bază nu erau încă clarificate. Triunghiul caracteristic este compus din mărimi finite, prin urmare perfect definite. Pentru *Leibniz* şi con-

temporanii săi, confirmarea continuă a raţionamentelor era o necesitate psihologică ; însă un control era posibil numai atunci cînd se ajungea la mărimi finite.

Inventarea unui nou calcul, cel infinitezimal — adică formularea unor anumite reguli de calcul şi a unui nou mod de notare care se ocupă de probleme de calcul diferenţial şi integral — nu a schimbat nimic din cele stabilite anterior. Despre problemele principale din matematică am mai vorbit : pentru diferenţiere, problema se reduce la determinarea tangentei în orice punct al unei curbe. Calculul integral ne învaţă să calculăm lungimea curbelor şi conţinutul figurilor în plan sau spaţiu. Pe noi ne interesează, în special, aplicaţiile acestor calcule în fizică.

Să ne închipuim un corp care parcurge un anumit spaţiu într-un timp determinat. Calculul diferenţial ne permite să stabilim viteza corpului în orice punct al traiectoriei sale. Invers, dacă cunoaştem viteza corpului în fiecare moment, calculul integral ne învaţă să calculăm din aceasta cursul iniţial al mişcării. Deci, diferenţierea şi integrarea sînt operaţii contrarii, tot aşa ca adunarea şi scăderea, înmulţirea şi împărţirea. Meritul nemuritor al lui *Leibniz* îl constituie inventarea unui nou sistem de calcul şi introducerea unui mod de notare potrivit. Prin aceasta, *Leibniz* a întrecut cu mult creaţia matematică a lui *Newton*, care a dezvoltat independent calculul diferenţial şi integral. *Leibniz* a introdus pentru diferenţiale semnul *d* şi pentru integrale simbolul $\int$, care pe atunci era modul obişnuit de scriere pentru *s*, o prescurtare pentru „sumă". Se cunoaşte exact ziua cînd s-a întîmplat acest lucru şi anume la 29 octombrie 1675. În această zi şi-a făcut intrarea *Leibniz* în domeniul calculului diferenţial şi integral modern. Ambele semne distinctive din matematica superioară apar aci pentru prima dată alături într-o scurtă teoremă.

Leibniz şi-a dat seama de importanţa metodei sale de calcul infinitezimal. El scria : „În notări, trebuie să fim atenţi ca acestea să fie comode pentru noi formulări. Aceasta se întîmplă de obicei ori de cîte ori notarea reprezintă însăşi miezul problemei printr-o exprimare cît mai concisă. Astfel se reduce într-un chip minunat munca de gîndire. Acesta este cazul notărilor pe care le-am utilizat în calcu-

lul infinitezimal şi cu ajutorul cărora rezolv deseori în cîteva rînduri cele mai grele probleme".

Pentru a stabli regulile care formează noul mod de calcul, se utilizează mărimi infinit de mici. Cu ajutorul lor se ocoleşte definiţia strictă a valorilor limită, după cum o ştim de la *Kepler*. Mărimile infinit de mici au fost clasificate în mărimi de gradul unu, doi, trei... În contrast cu toate cele cunoscute pînă atunci, mărimile de grad superior se neglijează faţă de cele de grad inferior. Această clasificare a provocat o mulţime de interpretări mai mult sau mai puţin inteligente; a fost însă şi mai greu să se explice mărimile infinit de mici şi numai cercetările lui *Cauchy* au putut să înlăture ultima îndoială. El a introdus noţiunea de limită, aducînd prin aceasta o complicare a metodei de calcul cunoscute pînă atunci.

Chiar şi *Newton*, însă mai mult pentru el însuşi, a utilizat în nenumărate rînduri noul mod de calcul, însă într-o formă mai puţin fericită decît cea a lui *Leibniz*. În opera sa monumentală „*Philosophiae naturalis principia mathematica*", apărută în anul 1687, se găsesc la început indicaţii, rezultatele fiind însă toate deduse prin metodele anterioare obişnuite. Este sigur că *Newton* a obţinut majoritatea acestor rezultate cu ajutorul noii metode de calcul; se temea însă de opoziţie în cazul cînd ar fi recurs oficial la o nouă metodă. În acest caz, contemporanii săi ar fi fost obligaţi să se familiarizeze nu numai cu idei complet noi în domeniul fizicei, ci şi cu formulări de noţiuni matematice cu totul originale. Această dublă sarcină ar fi speriat pe cei mai mulţi dintre ei. Deoarece însă aceştia erau cercetători în slujba statului şi, prin urmare, trebuiau să ia poziţie faţă de lucrările noi apărute, această luare de poziţie ar fi fost în defavoarea lui *Newton*. *Newton* însăşi spunea : „În aceste chestiuni nu poţi fi niciodată destul de prevăzător. Ştiinţa naturii este o persoană atît de îngrozitor de certăreaţă, încît este tot atît de puţin recomandabil să ai de-a face cu ea ca şi cu un avocat pus pe procese. Aşa am găsit-o eu ori de cîte ori m-am ocupat de ea. De aceea sînt acum atît de precaut". Prin cuvîntul ştiinţa naturii *Newton* se gîndea, însă, la savanţii care se ocupau cu această ştiinţă.

În deceniile următoare, calculul infinitezimal şi-a sărbătorit cele mai mari triumfuri în tratarea problemelor din

fizică. Totuşi, nu se poate nega că şi fără el se pot obţine rezultate importante. Se întîmplă ca un cercetător să aibe aptitudini numai pentru fizică, fără să posede o aplicaţie pentru matematică. Dacă unuia ca acesta îi reuşeşte să descopere ceva nou, atunci va înclina cu uşurinţă să considere matematica ca fiind de prisos şi totodată un balast. Această poziţie o trădează cuvintele renumitului fizician *Daniel Bernoulli*, pe care le-a adresat la 26 ianuarie 1750 lui *Euler* pe atunci preşedinte al Academiei de ştiinţe din Prusia : „Eu socoteam că se cer determinări fizice şi nu integrări abstracte. Începe să se strecoare un gust primejdios care face ca ştiinţele adevărate mai mult să sufere decît să progreseze ; deseori ar fi mai bine pentru fizica adevărată dacă nu ar exista matematica pe lume". Nu sună oare aceste cuvinte ca şi cînd ar fi fost spuse astăzi ? În zilele noastre, mecanica cuantelor a fost duşmănită din motive asemănătoare. Ea are la activul ei rezultate minunate şi neaşteptate; adversarii ei, însă, cu ce-ar putea-o înlocui ?

EVOLUŢIA LEGILOR MIŞCĂRII

Mecanica clasică a dăinuit mai mult de două secole şi a servit ca model pentru restul fizicii. Mecanica clasică explica tot ceea ce se putea observa atunci şi concluziile ei erau de o stricteţe incontestabilă. Am putea utiliza expresia că mecanica era de o rigurozitate matematică, deoarece începînd cu *Euclid*, matematica era socotită ca neputînd fi contestată şi chiar deseori era folosită pentru „noţiunea" de incontestabil.

Către sfîrşitul secolului al XIX-lea, încrederea în universalitatea mecanicii clasice a început să se clatine. S-au făcut observaţii care nu se împăcau cu principiile acesteia. După cum s-a mai amintit, electronii rapizi indicau o comportare care nu se putea explica decît prin aceea că masa lor creşte în timpul mişcării. Această afirmaţie nu epuizează însă complet fenomenul, astfel că acesta trebuie cercetat mai de aproape. De exemplu, creşterea masei ar putea fi datorată acceleraţiei electronilor: în realitate însă, ea depinde de viteza electronilor.

Această dependenţă împiedică electronii să depăşească

o anumită viteză — evident, foarte mare —, „viteza limită" $c = 300\,000$ km pe secundă. Mecanica clasică nu cunoaşte o asemenea interdicţie. În cadrul mecanicii clasice, orice viteză, oricît de mare ar fi, este posibilă, pe cînd în mecanica perfecţionată, acest lucru nu este posibil, deoarece dacă viteza tinde spre valoarea c atunci masa creşte la infinit. Conform acestei afirmaţii, valoarea c împarte vitezele în posibile şi imposibile ; o mişcare cu o viteză mai mare decît valoarea c este imposibilă.

Cu drept cuvînt putem vorbi despre o mecanică perfecţionată, deoarece cu ajutorul ei putem nu numai să explicăm noile constatări făcute cu electronii rapizi, ci şi alte observaţii, despre care nu se bănuia nimic pînă de curînd. Ne referim la o apariţie pe cer care se poate observa numai cu nişte lunete foarte puternice şi care se numeşte „deplasarea nebuloaselor spirale" ; cu această ocazie se vorbeşte, de asemenea, şi despre dilatarea cosmosului. Nebuloasele spirale sînt formate de îngrămădiri de stele asemănătoare căii lactee din sistemul nostru solar şi îşi datorează numele formei lor ; ele sînt formate dintr-un miez în jurul căruia se înfăşoară două braţe în formă de spirală. Aceste nebuloase spirale sînt neînchipuit de îndepărtate unele de altele. Între aceste nebuloase se găseşte „pulberea cosmică", care împiedică observarea lor din cauza absorbţiei luminii.

Pînă de curînd, observatorii nu au ţinut seama de aceste fenomene şi de aceea concepţiile noastre actuale asupra structurii universului apar îndoielnice. Între stelele unuia şi aceluiaşi sistem dintr-o cale lactee se găseşte, de asemenea, o materie fină, asemănătoare pulberii cosmice. De remarcat este faptul că toate stelele fixe — sau, după cum mai putem spune, toţi sorii — au aproximativ aceeaşi masă, care variază între 10^{33} şi 10^{35}g. Acestea sînt cifre care se scriu cu un 1 urmat de 33, respectiv 35 de zerouri. Soarele nostru, în jurul căruia ne rotim o dată cu pămîntul, are masa de aproximativ $1{,}9 \cdot 10^{33}$g.

Aceste indicaţii au trebuit să fie expuse aci, pentru a avea o justă înţelegere a ceea ce va urma. În ultima vreme s-a putut face o observaţie foarte curioasă. S-a constatat că nebuloasele spirale par să se depărteze de noi. Ele se depărtează cu o viteză cu atît mai mare cu cît sînt mai depărtate de noi, vitezele lor ajungînd la zeci de mii de kilometri

pe secundă pentru cele mai îndepărtate. În acest caz, două fenomene par de necrezut. Întîi, ca noi să ne găsim chiar în centrul din care porneşte această deplasare şi, al doilea, ca aceste mase enorme să se mişte cu viteze atît de mari.

În cadrul mecanicii clasice ar trebui să ne resemnăm şi să le acceptăm pe amîndouă. Prima obiecţie ar putea să fie la nevoie înlăturată prin aceea că s-ar considera că universul ar fi explodat, într-un trecut îndepărtat, asemănător unei grenade ale cărei schije au zburat cu atît mai departe, cu cît aveau o viteză mai mare, iar locuitorii pămîntului s-ar găsi întîmplător pe una din schijele ce s-ar mişca cu viteză mică. A doua obiecţie ar însemna însă că schijele cele mai rapide au căpătat nişte viteze cu totul de necrezut.

Mecanica perfecţionată găseşte o ieşire din această situaţie. Mai întîi, ea priveşte universul ca un spaţiu care este nelimitat şi totuşi finit. Chiar dacă aceasta prezintă oarecari dificultăţi pentru concepţia noastră, noţiunii însăşi nu i se poate obiecta nimic. Matematicienii au folosit această noţiune cu multe secole înainte şi deci nu se poate naşte bănuiala că s-ar fi inventat o noţiune extraordinară numai pentru a înlătura o dificultate. Insuficienţa noţiunii dispare dacă se trece de la spaţii la suprafeţe care nu au limită şi care totuşi sînt finite şi pot fi uşor indicate. Cea mai simplă dintre ele este suprafaţa unei sfere (fig. 28). Să ne închipuim o insectă care se mişcă pe o astfel de suprafaţă. Insecta poate să se plimbe oricît ar vrea şi nu va întîlni niciodată „sfîrşitul" lumii ei. Dacă va merge însă mereu „drept înainte", va ajunge în cele din urmă înapoi, la locul de plecare.

Prin aceasta, suprafaţa sferei se deosebeşte net de un plan, în care — dacă mergem drept înainte — ne depărtăm tot mai mult de punctul de plecare. Dimpotrivă, mergînd pe suprafaţa unei sfere, ne depărtăm la început de punctul de plecare al călătoriei, pentru a ne apropia ulterior din nou. Cu aceasta însă nu se termină surprizele pentru insectă, cu condiţia ca ea să aibă noţiuni de geometrie. Dacă ea ar măsura suma unghiurilor unui triunghi, ar găsi o valoare care depăşeşte două unghiuri drepte. În acest caz se vorbeşte de o geometrie neeuclidiană, în cea euclidiană suma unghiurilor unui triunghi fiind întotdeauna egală cu

suma a două unghiuri drepte (fig. 29). Dacă ne închipuim suprafaţa sferei ca un balon de gumă pe care sînt pictate stelele, acestea se vor depărta din ce în ce mai mult unele de altele, pe măsură ce balonul se umflă, fără ca ele să se fi mişcat pe suprafaţa balonului. O insectă profesor ar percepe acest fenomen în mod asemănător cu o „deplasare a nebuloasei spirale". Vite-

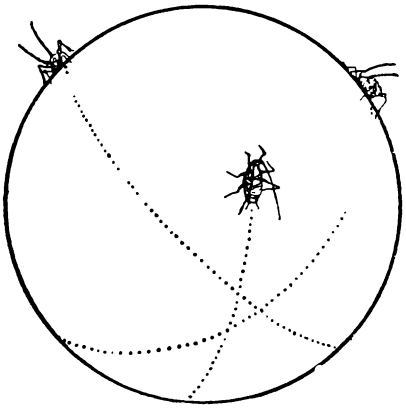


Fig. 28.

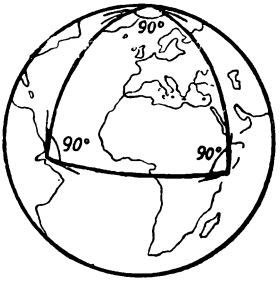


Fig. 29.

zele acestora ar fi în acest caz numai aparente şi în realitate deplasarea se datoreşte iuţelii cu care se dilată balonul, atunci cînd este umflat.

Raţionamentele arătate mai sus constituie o dovadă că noua mecanică nu este de loc completă, ci este în continuă evoluţie. A urmări această evoluţie este un lucru foarte instructiv. Cînd auzim azi de greşelile pe care le-au comis pionierii calculului diferenţial şi integral, ne mulţumim să clătinăm dezaprobator din cap. Astăzi ne este uşor să procedăm aşa, deoarece calculul infinitezimal a fost de mult cercetat, nici o problemă în legătură cu el nu a rămas nerezolvată şi nici o dificultate, neînlăturată. De la nivelul cunoştinţelor noastre de astăzi nu ne putem face o imagine reală a situaţiei de atunci şi din această cauză nu ne putem forma o părere justă. Neînţelegerile încep abia în cazul problemelor care nu sînt complet rezolvate şi care dăinuiesc atîta timp cît teoria respectivă nu a fost formulată. Acesta este cazul noii mecanici. Cînd *Friedmann* şi-a exprimat

acum trei decenii pentru prima dată părerea asupra existenţei unui univers care se extinde, aceasta a fost imediat respinsă. I s-a atribuit o greşeală neînsemnată de calcul şi cu aceasta totul s-a liniştit. Mai tîrziu, pentru a explica deplasarea nebuloaselor spirale, cercetătorii s-au văzut siliţi să se întoarcă la această idee. Un timp după aceasta, revistele ştiinţifice au fost direct inundate cu articole care tratau această problemă. Dacă nu s-ar fi ştiut că era vorba de dorinţa de a se obţine un renume ştiinţific, s-ar fi putut vorbi de o modă.

Ne vom limita să explicăm motivele iniţiale care au dus la mecanica perfecţionată. Pentru aceasta ne stau la dispoziţie mai multe căi. Noi vom alege un drum cu cît mai puţine calcule posibile, pe care la început le vom exclude complet, ceea ce se poate realiza fără pericolul de a ocoli raţionamente hotărîtoare. În principiu, două ipoteze formează fundamentul pe care se poate construi noua mecanică. Prima, atribuie energiei o masă. Această ipoteză îşi face apariţia cam pe la 1890. Conform acestei ipoteze, se consideră că masa este proporţională cu energia, problema factorului de proporţionalitate rămînînd deocamdată deschisă. Din această ipoteză rezultă imediat că masa depinde de viteză, precum şi forma acestei dependenţe.

O a doua ipoteză cere o viteză absolută c. Dacă înainte se punea condiţia existenţei unui număr mare de observatori, care se găseau în aşa-numitul sistem inerţial şi la care se refereau enunţările iniţiale ale mecanicii, în cazul de faţă se cere ca toţi aceşti observatori să găsească aceeaşi valoare pentru viteza c. Această condiţie nu este compatibilă cu mecanica clasică. Observatori care s-ar mişca unul faţă de altul ar stabili în acest caz valori diferite. Această a doua condiţie aduce cu sine valoarea c^2 pentru factorul de proporţionalitate dintre energie şi masă.

Nu rămîne acum decît să se determine valoarea vitezei c. După cum s-a spus, valoarea lui c este de aproximativ 300 000 km pe secundă. Această valoare duce la urmări demne de remarcat. Dacă am putea să transformăm materia în energie, atunci ar fi suficientă masa unei singure brichete de cărbuni pentru a face să navigheze peste oceanul Atlantic un vapor transoceanic ca „Europa" într-un

interval de timp atît de scurt, încît ar cîştiga panglica albastră[1] cu un record încă nevisat. Din păcate, nu ne găsim încă în această situaţie, cu toate că ultimele succese din domeniul fizicii nucleare dau cele mai mari speranţe în această privinţă.

Mecanica clasică şi mecanica modernă sînt de acord că fenomenele naturii sînt conduse în sistemele inerţiale de aceleaşi legi ale naturii. Aceasta nu trebuie însă confundat cu faptul că rezultatele măsurătorilor făcute de diferiţi observatori sînt diferite între ele. Acest lucru nu este de loc surprinzător. Dacă dintr-un tren în mers se observă un avion care întrece trenul, atunci pentru viteza acestuia se obţine o altă valoare decît ar găsi-o cantonierul de cale ferată; în mecanica clasică diferenţa observaţiilor este în mod „normal" egală cu viteza trenului.

Evident că în mecanica clasică s-ar tăgădui cu toată hotărîrea că observatorul din tren şi cantonierul ar putea obţine altă valoare pentru lungimea vagonului restaurant al trenului. Şi tocmai aceasta o susţine mecanica modernă. Ea merge încă mai departe, susţinînd ceva asemănător şi pentru timp. Conform mecanicii moderne, valorile spaţiului şi timpului se referă întotdeauna la un anumit observator şi nu are nici un sens să se vorbească despre „lungime" şi despre „durată" fără să se adauge la ce observator se referă aceste noţiuni. De aceea, mecanica modernă se mai numeşte şi teoria relativităţii. Această raportare a indicaţiilor de spaţiu şi timp la un observator anumit rezultă din cele două ipoteze de mai sus. Pe cît pare de paradoxală această raportare, ea este perfect posibilă, lucru dovedit de puţinele formule matematice prin care se poate exprima întreaga problemă. Aceste formule au un caracter elementar şi pentru cei care sînt obişnuiţi cu manevrarea lor; ele permit înţelegerea problemei mult mai uşor decît s-ar putea face prin cuvinte.

Formulele constituie un limbaj special, compus din incomparabil mai puţine „cuvinte" decît limbajul obişnuit şi a cărui gramatică nu admite nici o excepţie. Ar fi interesant să aflăm motivul pentru care, totuşi, există în gene-

[1] Panglica albastră se decerna ca premiu pentru traversarea Oceanului Atlantic în timpul cel mai scurt (*N. R.*).

ral o anumită teamă de formulele matematice. Să fie oare amintirile din timpul şcolii? Singură această explicaţie, nu este suficientă, deoarece alte discipline din şcoală — ca, de exemplu, istoria — nu au de loc un efect retroactiv de repulsie. Se pare că aceasta se datoreşte mai mult unei lipse în ceea ce priveşte posibilitatea de abstractizare, care ar putea fi înlăturată prin exerciţii. Proverbul că nimeni nu se naşte învăţat este şi în acest caz valabil. Pentru a putea cînta la pian trebuie exersat necontenit; de ce oare nu ar fi valabil acest lucru şi pentru matematică? Aceasta nu este mai puţin atrăgătoare cînd o stăpînim!

Să nu ne lăsăm intimidaţi şi să indicăm formulele fundamentale. Cheia teoriei relativităţii o formează o valoare care reprezintă rădăcina pătrată a expresiei:

$$1 - \frac{v^2}{c^2},$$

în care v reprezintă viteza cu care un sistem inerţial ce trebuie observat trece prin faţa unui observator. Expresia de mai sus o notăm cu litera β din alfabetul grecesc. Renunţăm la cîteva calcule intermediare şi indicăm numai rezultatele care reies din legile arătate pînă în prezent. Mai întîi, în mecanica modernă lungimile corpurilor apar mai scurte: un baston de lungime L aflat în repaus într-un sistem inerţial ce trece prin faţa observatorului va apare acestuia mai scurt cu factorul β, deci avînd o lungime aparentă βL. Rezultă că pentru ca un corp să se scurteze aparent la jumătate, trebuie să treacă pe lîngă noi cu o viteză de aproximativ 257 000 km/s, căci în acest caz β capătă tocmai valoarea $\frac{1}{2}$. În aceste condiţii, o mingе de fotbal ar părea un disc şi un om foarte gras va părea turtit, deoarece totul se strînge aparent în direcţia mişcării. Despre cura de slăbire aparentă, omul gras nu va observa nimic, continuînd să mănînce liniştit mai departe.

Timpul pare, dimpotrivă, să se lungească: dacă un ceasornic aflat în sistemul inerţial ce trece prin faţa observatorului arată pentru durata unui fenomen T secunde, atunci această valoare apare observatorului mărită prin împărţire cu β, deci de o durată aparentă $T : \beta$. Nu trebuie uitat că β are valoarea 1 numai atunci cînd v devine zero, altfel este întotdeauna mai mic decît 1. Valoarea reciprocă

a lui β, adică $1 : \beta$, este deci mai mare decît 1, deci $T : \beta$ este mai mare decît T. Din această cauză, observatorul nostru trăieşte tot ce se petrece în sistemul inerţial care îi trece prin faţă, ca şi cum ar privi printr-o lupă amplificatoare de timp.

Un al doilea observator aflat în interiorul sistemului inerţial ar constata acţiunile primului observator încetinite în aceeaşi măsură. Aceasta pare paradoxal, însă este perfect valabil, deoarece nici un sistem inerţial nu este absolut faţă de celălalt. Dacă *Dante* ar trăi astăzi, ar putea folosi, în chip diabolic, pentru iadul său posibilităţile ce decurg din cele expuse mai sus. *Dante* ar pedepsi un gelos prin aceea că l-ar lăsa să asiste la o declaraţie de dragoste care ar trece pe dinaintea lui, durata trecerii fiind de un milion de ani. Desigur că în acest caz ar fi necesară o viteză de deplasare apropiată de viteza c. Pentru un poet însă, nimic nu este imposibil, deci nici o asemenea viteză.

Masele în mişcare par să crească. O masă m care se mişcă cu o viteză uniformă v pare, ca şi timpul, mai mare prin împărţirea cu β, avînd deci valoarea aparentă $m : \beta$. Valoarea masei cînd v devine zero poartă numele de „masă de repaus" şi se constată că această valoare reprezintă un minimum, deoarece pentru vitezele v diferite de zero, factorul $1 : \beta$ este mai mare decît 1. Prin aceasta ne găsim în situaţia de a enunţa în mecanica modernă o lege analogă legii a doua a dinamicii. Noi am cunoscut-o mai întîi sub forma $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Membrul din dreapta al egalităţii se mai poate scrie şi altfel, scriind mai întîi produsul dintre masă şi viteză. Această mărime are un rol important şi în mecanica clasică. Ea este numită „impuls" şi reprezintă ceva asemănător cu „forţa de şoc" a corpului care se mişcă cu viteza respectivă, fără ca în acest caz să considerăm literal această comparaţie. Pe de altă parte, ştim că acceleraţia reprezintă variaţia în timp a vitezei. În mecanica clasică masa este constantă. Prin urmare, noi putem considera produsul $m \cdot \vec{a}$ şi ca o modificare în timp a impulsului şi putem, deci, enunţa legea a doua a dinamicii într-o formă nouă şi anume : Forţa este egală cu variaţia în timp a impulsului. În mecanica modernă vom uti-

liza întotdeauna această definiţie, deoarece şi aci forţa este definită ca fiind o variaţie în timp a impulsului.

La început, s-ar părea că prin aceasta nu s-a schimbat nimic. Trebuie să ne gîndim însă că în mecanica modernă masa nu mai rămîne constantă. Din această cauză, valoarea forţei nu mai rezultă din produsul dintre masă şi acceleraţie, ci are o formă ceva mai complicată. De aci reiese că forţa şi acceleraţia au direcţii deosebite, spre deosebire de mecanica clasică în care cele două direcţii coincid neapărat.

Dacă durata şi lungimea sînt mărimile la care ne gîndim mai întîi în mecanică, totuşi acestea nu constituie singurele elemente. După cum am văzut, dacă fizicianul vrea să lucreze cu o precizie matematică, trebuie să pună la baza enunţurilor sale un sistem de referinţă. El defineşte fiecare punct în spaţiu prin trei coordonate : x, y, z ; de asemenea, el indică timpul t în care vrea să observe punctul. Toate aceste patru mărimi, adică cele trei coordonate spaţiale x, y, z şi o coordonată a timpului t, fizicianul le exprimă printr-un singur cuvînt, „evenimente". Prin aceasta trebuie să înţelegem că se întîmplă ceva într-un loc anumit şi la un anumit moment. Locul şi timpul se referă la un anumit sistem inerţial.

Ceea ce fizicianul percepe, ceea ce poate el măsura este dat de constatarea asupra coincidenţei în spaţiu sau timp a două evenimente. Dacă acestea coincid în spaţiu, atunci rămîne de determinat durata care le desparte. Dacă coincid în timp, deci se produc în acelaşi moment, atunci trebuie să se determine distanţa lor în spaţiu. Dacă evenimentele coincid în timp şi sînt îndepărtate în spaţiu, este necesară o discuţie mai amănunţită. Două evenimente oarecare pot fi comparate între ele dacă se recurge la un al treilea eveniment, care să coincidă în spaţiu cu unul dintre evenimente şi în timp, cu celălalt. Această întîmplare simultană a evenimentelor fie în spaţiu, fie în timp se numeşte coincidenţă. Micşorarea aparentă a lungimilor este denumită „contracţie", iar mărirea aparentă a intervalelor de timp, „dilatare".

Problema fundamentală a teoriei relativităţii — sau, mai exact, a teoriei relativităţii restrînse — este următoarea : ce legătură există între elementele care definesc un

eveniment, în cazul cînd acesta este observat din două sisteme inerţiale diferite? Fie x, y, z şi t aceste mărimi pentru unul din sistemele inerţiale, mărimile corespunzătoare în celălalt sistem inerţial fiind notate cu x', y', z' şi t'. Conform celor două ipoteze de la început, între cele două serii de mărimi există următoarea dependenţă:

$$\beta x' = x - vt$$

$$\beta t' = t - \frac{v}{c^2} x$$

În acest caz s-a presupus că mişcarea se produce paralel cu axa x. De aceea, y şi y', precum şi z şi z' coincid, deci $y = y'$ şi $z = z'$. Conform structurii lor matematice, aceste relaţii sînt numite „transformări lineare" şi poartă de obicei numele de „transformările lui *Lorentz*", după numele fizicianului olandez căruia i se datoreşte formularea lor. Pentru comparaţie, să menţionăm relaţiile care mijlocesc în mecanica clasică trecerea de la un sistem la celălalt şi anume:

$$x' = x - vt.$$

Celelalte mărimi coincid între ele, deci $y = y'$, $z = z'$, $t = t'$. Relaţiile acestea se numesc „transformările lui *Galileu*". Evident că ele au o structură mult mai simplă.

Un matematician nu se sperie de relaţiile de transformare ale lui *Lorentz*. Dimpotrivă! Inima lui bate mai puternic, deoarece el vede acum posibilităţi mult mai mari decît în cazul transformărilor lui *Galileu*. Într-adevăr, un matematician, *Minkowski*, a reuşit să dea înfăţişarea potrivită teoriei relativităţii restrînse. În felul acesta, tot ce cuprinde această teorie se poate exprima în cîteva relaţii clare. Acestea se aplică într-o „lume" cu patru dimensiuni, în care însă fenomenul real se deduce uşor, în acelaşi fel în care îl percepem noi.

Structura acestui supraunivers se deosebeşte de geometria euclidiană obişnuită. Aceasta ar fi fost de neconceput chiar şi în secolul al XVIII-lea, deoarece atunci nu se cunoştea decît o singură geometrie, aceea a lui *Euclid*. Nu este deci de mirare că această geometrie se considera valabilă fără excepţie în lumea percepută de noi. Este totuşi ciudat că existînd de mult o geometrie pentru suprafaţa

sferei, nimeni nu s-a gîndit că aceasta ar putea fi privită ca o geometrie neeuclidiană, cu toate că, în jurul anului 450 î.e.n., *Proklos*, primul comentator al lui *Euclid*, şi-a exprimat unele îndoieli care ar putea fi privite ca încercări de cercetare a valabilităţii unor noi geometrii.

De îndată ce s-a format părerea că pot exista mai multe geometrii, se pune de la sine întrebarea care dintre acestea este valabilă pentru lumea noastră. Aceasta nu este o problemă pur matematică, deoarece este vorba de comportarea geometrică a problemelor fizice. Pentru a cerceta mai îndeaproape această problemă, trebuie să apelăm la experienţă. Acest lucru mai fusese încercat de *Gauss*, care pare să fi măsurat un triunghi ale cărui laturi erau formate de raze de lumină şi ale cărui vîrfuri erau vîrfurile a trei munţi. Pe *Gauss* îl interesa suma unghiurilor acestui triunghi. Dacă această sumă ar fi fost diferită de aceea a sumei a două unghiuri drepte, ar fi rezultat că spaţiul pe care îl percepem cu simţurile noastre nu are o structură euclidiană. „Si non è vero, bene trovato"[1], dură cum spune un proverb. Nu este necesar să se spună că *Gauss* a făcut măsurătorile cu cea mai mare grijă posibilă. Totuşi, oricît de minuţios se fac măsurătorile, întotdeauna rezultatul este legat de o eroare inevitabilă de măsurare.

Prin aceasta trebuie să înţelegem următoarele : Dacă se măsoară de mai multe ori la rînd o anumită lungime, rezultatele obţinute vor fi diferite. Dacă în cazul unei adunări pe care o refacem pentru siguranţă de zece ori obţinem zece rezultate diferite, înseamnă că am greşit. Fizicianul care obţine pentru aceeaşi lungime măsurată zece valori diferite, are, dimpotrivă, completă dreptate. Care este lungimea adevărată, aceasta nu se va cunoaşte niciodată. Măsurătorile permit numai stabilirea valorii celei mai probabile. Fizica atomică merge însă hotărît mai departe şi tăgăduieşte însuşi dreptul de a pune această întrebare, susţinînd că o distanţă este în acelaşi timp diferit de lungă! După cum vom vedea mai tîrziu, această afirmaţie nu conţine nici o contradicţie.

Deocamdată să ne ocupăm în continuare de macrofizică. În cadrul acesteia, obţinem din măsurătorile făcute

[1] Expresie în limba italiană care se traduce în limba romînă prin: „Dacă acest lucru nu este adevărat, este totuşi nimerit" (*N. R.*).

valoarea cea mai probabilă, precum şi o indicaţie suplimentară asupra abaterii valorii obţinute faţă de valoarea reală. Această indicaţie se numeşte eroare de măsurare şi ambiţia fizicianului constă în a micşora această eroare pe cît posibil. Fizicianul ştie însă că înlăturarea totală a acestei erori nu îi va reuşi niciodată. La măsurătorile făcute de Gauss, eroarea în măsurare trebuie să fi fost astfel, încît pentru suma unghiurilor era posibilă atît valoarea dată de geometria euclidiană, cît şi o valoare întrucîtva diferită; mărimea abaterii era cuprinsă, însă, în limita erorilor posibile. În acest caz trebuie să vorbim despre un rezultat negativ al experienţei. Cu toate acestea, experienţa nu a rămas fără rezultat, deoarece ea arată că spaţiul în care trăim se poate deosebi numai puţin de structura euclidiană. Acest fapt este confirmat de evoluţia ulterioară a mecanicii moderne sub forma teoriei relativităţii generalizate.

Ne amintim cît de deosebită era geometria sferei faţă de geometria plană. În geometria sferei, cercurile mari joacă un rol asemănător unor „drepte", cu toate că ele sînt curbe, însă tocmai această curbură este esenţială. Fizicianul reduce toate fenomenele la mişcare. Problema fundamentală constă în a studia mişcarea punctelor materiale sub influenţa unor forţe. Forţele au rolul de a conduce punctul material şi în ultimă analiză totul se reduce la desfăşurarea în timp a mişcării. Deci, dacă se reuşeşte să se găsească o geometrie ale cărei „drepte" să reprezinte tocmai traiectoriile parcurse de punctele materiale, atunci scopul teoreticianului adept al teoriei relativităţii este atins. A mai vorbi despre forţe nu mai este necesar, deoarece acestea sînt cuprinse în geometrie. În cazul gravităţii, acest scop şi fusese atins. Dimpotrivă, cu toate încercările repetate, realizarea dorinţei de a „geometriza" electricitatea şi magnetismul nu a fost încă obţinută. La fiecare nouă încercare se spunea că cele dinainte nu mai sînt valabile; curînd după aceasta se constata, însă, că nici noua experienţă nu putea fi folosită. Teoria relativităţii a murit, deci trăiască teoria relativităţii! Aşa s-ar putea spune conform unui dicton francez. Astăzi însă este stabilit că teoria relativităţii, deşi şi-a găsit confirmarea, nu este totuşi suficientă pentru lumea atomilor.

În mecanica modernă există o mărime care ocupă o situaţie specială. Noi am notat-o cu litera *c* şi am constatat că este cuprinsă în majoritatea relaţiilor. Din această cauză se numeşte constanta fundamentală. Valoarea ei este de 300 000 km/s. Demn de remarcat este faptul că şi viteza luminii are exact aceeaşi valoare. Această concordanţă nu este o întîmplare. Pentru a ne da seama de acest lucru, trebuie să ne ocupăm întîi mai îndeaproape de lumină, care se propagă cu o viteză finită şi în legătură cu această propagare putem spune următoarele cuvinte demne de Pythia : Ceea ce vedem este trecutul, în timp ce prezentul formează viitorul nostru.

Ochiul reacţionează la excitaţia luminii, spre deosebire de celelalte simţuri. Prin aceasta, lumina se situează mai întîi ca o calitate specială a simţurilor. A ne mulţumi cu această explicaţie înseamnă a ne însuşi punctul de vedere care permite omului să utilizeze lumina ca o unitate de măsură a tuturor lucrurilor. De aceea, se poate înţelege de ce iniţial ştiinţa a procedat astfel, dezvoltînd mai întîi optica ca o ramură independentă a ştiinţei. Pe măsura înmulţirii cunoştinţelor a rezultat, însă, că optica formează numai un capitol în disciplina electricităţii. Teoreticianul *Maxwell* a fost primul care a recunoscut aceasta în secolul trecut ; experienţele ulterioare ale lui *Hertz* au confirmat aceste constatări. De atunci, optica constituie un capitol din electricitate. Concepţia lui *Maxwell* despre lumină a făcut să se constate că fenomene care par complet diferite sînt în fond aceleaşi şi că aceste fenomene se supun aceloraşi legi fizice. Astfel, s-a văzut că lumina şi căldura radiantă sînt înrudite, cu toată diferenţa pe care o constată simţurile noastre. Concepţia antropomorfă a lumii a fost, aşadar, din nou depăşită.

Lumina constituie o mişcare ondulatorie în oceanul cîmpurilor electrice. Ipoteza că lumina este o mişcare ondulatorie se datoreşte renumitului fizician olandez *Huygens*, care nu şi-a închipuit în nici un caz cîmpul electric, pe atunci necunoscut, ca purtător al oscilaţiilor din care se compune mişcarea ondulatorie, ci un mediu special, eterul. *Huygens* îşi închipuia eterul ca o substanţă care

pătrunde prin toate lucrurile; el nu are masă şi se găseşte într-o continuă stare de repaus, cu excepţia perturbărilor produse de razele de lumină. Se vede că această reprezentare s-a imaginat prin asemănare cu comportarea undelor de la suprafaţa apei dintr-un eleşteu liniştit. Această comparaţie se mai foloseşte cu folos şi la reprezentarea formării diferitelor feluri de unde. Nu trebuie însă să se uite că este vorba numai de o imagine. Ar fi complet greşit dacă la contemplarea unui tablou s-ar trage concluzia că modelul reprezentat s-ar compune şi în realitate din vopsea. Tot atît de greşit ar fi dacă s-ar considera pentru lumină un mediu real, compus dintr-o substanţă care vibrează, numai fiindcă în cazul undelor lichide, mediul ondulatoriu, apa, este o substanţă.

Să începem cu un lucru pe care l-am făcut destul de des ca copii şi anume cu aruncarea unei pietre într-o apă liniştită. În jurul locului în care a căzut piatra, la suprafaţa apei se formează cercuri concentrice. Fiecare particulă de apă atinsă de această tulburare oscilează în sus şi în jos. Între oscilaţii există o legătură pe care ochiul nostru o cuprinde ca o mişcare ondulatorie. Toate particulele de apă au comportări identice. Mărimea amplitudinii variază în timp. Ea atinge o valoare maximă, pentru ca apoi să coboare pînă la zero. După aceasta, amplitudinea creşte în direcţie opusă pînă atinge valoarea maximă anterioară şi dacă nu ar exista frecarea, mişcarea s-ar repeta la infinit. Această valoare maximă este denumită interval de oscilaţie sau amplitudinea undei, iar numărul de oscilaţii pe secundă, frecvenţă ν. Distanţa dintre maximele a două unde se

Fig. 30.

numeşte lungime de undă λ, iar viteza cu care se propagă excitaţia pe suprafaţa apei, viteza de propagare a undelor u. Aceasta este egală cu produsul dintre frecvenţă şi lungimea de undă, adică $u = \nu \cdot \lambda$. În cazul luminii, pentru notarea vitezei se utilizează întotdeauna litera c. În afară de aceasta,

se obișnuiește să se noteze valoarea inversă a lungimii de undă, adică numărul de undă, cu litera k, deci $\frac{1}{\lambda} = k$.

Se știe cum se compun în general două mișcări pentru a rezulta o mișcare nouă. În cazul a două unde, această compunere se numește interferență. Acest fenomen poate fi bine observat atunci cînd în apă cad simultan două pietre. Ambele unde care se propagă concentric se întrepătrund după cîtva timp, astfel că în unele locuri ele se întăresc, iar în alte locuri, se anulează total sau parțial (fig. 30). Aceasta rezultă imediat din compunerea celor două impulsuri pe care le primește aceeași particulă de apă din partea celor două unde. Dacă ambele impulsuri se produc în același sens, atunci se adună, fapt care se manifestă printr-o amplitudine mai mare a particulei de apă ; dacă însă cele două impulsuri se produc în sens invers, atunci impulsul mai puternic are întîietate, suferind totuși o micșorare egală cu aceea a impulsului mai slab. În acest fel, două unde se pot chiar anula complet. Dacă se aplică aceste cunoștințe undelor luminoase, se ajunge la formularea paradoxală că adunînd lumină cu lumină obținem cîteodată întuneric; desigur că interferența poate fi observată numai dacă razele luminoase provin de la aceeași sursă de lumină.

Unui neinițiat i se pare curios felul în care un fizician disecă ceea ce văd ochii lui; i se pare, de exemplu, curios cînd se spune că lumina soarelui se compune dintr-un amestec de lumini de diferite culori. Nouă, lumina ne apare însă albă și de aceea ne împăcăm greu cu ideea de a schimba un lucru constatat de noi cu o explicație ce pare artificială. *Goethe* s-a opus în tot timpul vieții sale acestui fapt. Realitățile au însă cuvîntul hotărîtor și nu ne rămîne altceva de făcut decît să ne supunem acestora. Trebuie să ne resemnăm la faptul că nu percepțiile simțurilor noastre formează cărămizile din care s-a construit edificiul măreț al fizicii, aceste cărămizi fiind de o natură complexă. Culoarea albă a luminii solare este aparentă : ea se compune din suprapunerea unor culori care reprezintă unde luminoase, acestea la rîndul lor datorîndu-se unei anumite excitații a cîmpurilor electrice. Lămurirea întrebării cu privire la identificarea ultimelor elemente constituie o

întrebare la care fiecare secol trebuie să dea un nou răspuns.

Fiecare culoare din care se compune lumina solară este caracterizată prin lungimea ei de undă. După valoarea lungimii de undă λ, unda de lumină ne apare roşie, verde, albastră sau într-una din celelalte infinit de multe culori ale spectrului solar. Toate undele spectrului solar care ne apar nouă sub formă de lumină vizibilă sînt cuprinse într-un interval de unde restrîns, în apropierea de 10^{-4} cm, adică a zecea mia parte dintr-un centimetru. Undele ale căror lungime λ sînt mai mici sau mai mari nu sînt vizibile, însă produc efecte fizice, chimice sau fiziologice. Astfel, fiecare din noi cunoaşte efectul radiaţiilor ultraviolete ale soarelui, în aer curat. De obicei se deosebesc diferite domenii de lungimi de undă, ca, spre exemplu, razele Roentgen, cu lungimi de undă mici sau radiaţiile calorice, cu lungimi de undă mari. Ultimele dintre acestea sînt percepute sub formă de căldură, în timp ce razele Roentgen pătrund prin obiecte opace, fapt de mult cunoscut din practica medicală.

Fiecare mişcare ondulatorie satisface o anumită condiţie, pe care matematicienii o numesc ecuaţia undei. Din aceasta se poate trage o concluzie importantă. Faptul că undele satisfac această ecuaţie permite să se calculeze în orice loc oscilaţia, dacă aceasta este cunoscută în fiecare punct al unei suprafeţe care înconjoară acest loc. Acest lucru se face cu ajutorul relaţiei stabilită de *Kirchhoff*.

Formula lui *Kirchhoff* face posibilă determinarea comportării luminii cînd trece printr-un orificiu (fig. 31). Din experienţă se ştie că nu se observă nimic extraordinar dacă acest orificiu este mare. Fenomenul este, însă, cu totul altul dacă orificiul este foarte mic. În acest caz se produce lumină acolo unde ne-am aştepta să fie umbră, şi umbră acolo unde ne aşteptăm să observăm lumină. Acelaşi fenomen se produce atunci cînd se pune un paravan mic (ecran) în dreptul luminii (fig. 32). În anumite împrejurări, în spatele acestui ecran se formează o pată luminoasă. Atît în cazul orificiilor mici cît şi a ecranelor, lumina pare să ocolească obstacolele. În acest caz fizicienii vorbesc despre difracţia luminii. Această comportare curioasă a luminii a fost dovedită experimental la începutul secolului al XIX-lea de către tînărul fizician francez *Fresnel*. Prin

acest rezultat, *Fresnel* a rezolvat definitiv o dispută dintre *Huygens* şi *Newton*, în favoarea primului din ei. Însă niciunul din ei nu mai trăiau ca să cunoască aceste rezultate.

Difracţia luminii poate fi considerată ca o interferenţă a undelor luminoase. Pentru aceasta trebuie să ne referim

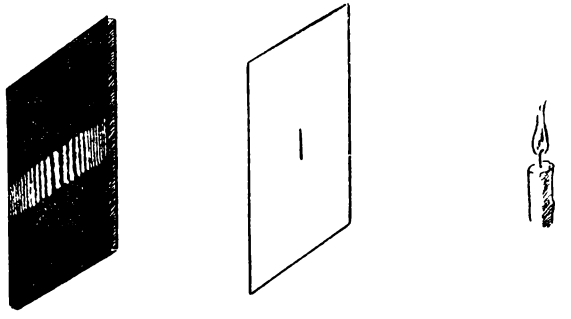


Fig. 31. — **Difracţie produsă de deschidere îngustă**

mai întîi la o ipoteză a lui *Huygens*. Acesta şi-a imaginat că propagarea luminii se face în aşa fel, încît din fiecare punct atins de unda luminoasă porneşte o nouă undă

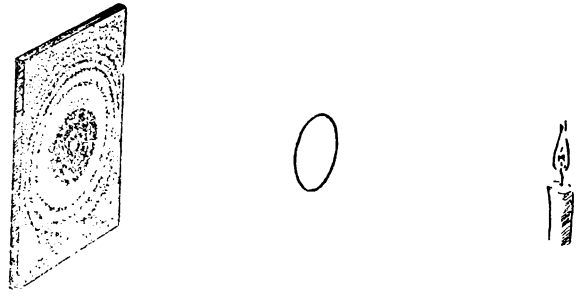


Fig. 32 — **Difracţie produsă de şaibă**

luminoasă, aşa-numita undă secundară. *Fresnel* a adăugat că aceste unde secundare provoacă fenomenul constatat, prin aceea că ele interferă în locul de observaţie. În baza acestei concepţii, trebuie să ne închipuim în felul următor difracţia luminii printr-un orificiu mic : de la acest orifi-

ciu pornesc unde secundare a căror interferenţă produce lumină sau umbră la locul de observaţie.

După cum s-a mai spus, lumina constituie o anumită excitaţie a cîmpului electric şi prin aceasta optica, care se ocupă cu studiul luminii, face parte din teoria electromagnetismului. Împotriva acestei teorii a existat timp de două secole o altă concepţie, care considera lumina ca fiind un curent de particule foarte mici. Această concepţie se datoreşte lui *Newton*, care a putut cu ajutorul ei să explice multe fenomene optice.[1] Cît de puţin indicat este un cult al personalităţii în ştiinţă, se poate constata cu claritate tocmai din acest caz, autoritatea lui *Newton* purtînd vina că părerile lui *Huygens*, exprimate aproape în acelaşi timp şi care concepeau lumina ca o mişcare ondulatorie, nu au fost luate în consideraţie atîta timp. Astăzi, dacă ne gîndim cum s-a putut ajunge la un asemenea cult al personalităţii, ne dăm seama că aceasta se întîmplă de obicei din cauza unor insuficienţe. Sau reprezentările savantului cuprindeau lucruri neclare, considerate însă ca o ultimă înţelepciune, sau vina era a contemporanilor, pe care savantul îi depăşise cu mult. Ca exemplu pentru primul caz îl citäm pe *Aristotel*, iar pentru al doilea caz, pe *Arhimede*.

Pentru a cerceta natura luminii se utilizează reţele optice, care ne permit să obţinem interferenţa, indicată pînă în prezent numai în linii generale. O reţea se formează atunci cînd pe o suprafaţă lucie de sticlă sau de metal se

---

[1] Ideea că personalitatea lui Newton a împiedicat dezvoltarea teoriei ondulatorii a luminii trebuie privită cu toate rezervele. Huygens nu elaborase o teorie închegată, care să poată fi opusă celei corpusculare a lui Newton; ba nici nu presupunea o periodicitate a fenomenelor luminoase, caracteristică esenţială a undelor.

Iată ce spunea G. S. Landsberg (Optica, Editura Tehnică, ediţia a doua, p. 19):

În felul acesta, părerea larg răspîndită, cum că Huygens ar fi creatorul teoriei ondulatorii a luminii, teorie bine închegată, ce ar fi putut fi opusă teoriei corpusculare a lui Newton, este incorectă. Pe timpul lui Huygens şi Newton, teoria ondulatorie era numai foarte schematic conturată. Afară de aceasta, cel mai important element al concepţiei ondulatorii, periodicitatea fenomenelor luminoase, a fost sezisat mult mai clar de Newton, care, experimentînd cu aşa-zisele inele ale lui Newton, a efectuat şi măsurători, pe baza cărora putem calcula suficient de precis lungimile de undă ale radiaţiilor de diferite culori. *(N. R.)*

trasează niște dungi la distanțe egale. Pentru aceasta este necesar să se traseze mai multe sute sau chiar mii de asemenea dungi pe centimetru. Trasarea dreaptă și uniformă a acestor dungi constituind o adevărată artă. În acest domeniu, americanul *Rowland* este neîntrecut (fig. 33). În timpul petrecut pentru studii în Germania, la sfîrșitul secolului trecut, el a reușit să confecționeze cîteva rețele excepționale, care încă și astăzi sînt păstrate ca niște giuvaere.

Fig. 33. — Difracție produsă de o rețea Rowland

Dacă lumina provenită de la o sursă luminoasă foarte depărtată, cade perpendicular pe o rețea — presupunem o lumină monocromatică cu o lungime de undă uniformă λ — și dacă această lumină este apoi prinsă pe un ecran așezat în dosul rețelei, în centrul ecranului se observă o bandă luminoasă, însoțită de o parte și de alta de alte benzi luminoase, înșirate simetric. Toate acestea se produc datorită interferenței, lumina întărindu-se în dreptul acestor benzi luminoase, în timp ce în spațiile întunecate, intermediare, lumina se stinge. Așadar în dreptul benzilor luminoase lumina atinge un maximum de intensitate. Din formula lui *Kirchhoff* se pot calcula distanțele dintre aceste maxime. Pentru distanța a dintre banda centrală și banda n rezultă expresia $a = Dn\lambda : d$. În această formulă, d reprezintă distanța dintre două linii trasate ale rețelei — constanta rețelei — și D, distanța dintre bandă și rețea.

Cu ajutorul formulei indicate mai sus și a unei rețele convenabile se poate determina cu ușurință lungimea de undă. Se alege de exemplu $n = 1$ și se măsoară constanta rețelei d, apoi D și a, toate acestea fiind măsurători obișnuite de lungimi. Din determinarea lungimii de undă λ, rezultă că lungimile de undă ale culorilor vizibile sînt cuprinse între valorile $397 \cdot 10^{-6}$ mm până la $723 \cdot 10^{-6}$ mm, factorul 10^{-6} reprezentînd a milioana parte dintr-un milimetru. Acest domeniu de lungimi de unde se numește spectru vizibil.

O rețea care permite măsurători în cadrul spectrului vizibil nu este potrivită pentru lungimi de undă mult

diferite de acestea. Cu cît lungimea de undă este mai mică, cu atît trebuie aleasă o constantă mai mică a reţelei, pentru ca maximele să se poată deosebi între ele. Trebuie ţinut seama că în sens strict geometric, benzile luminoase nu sînt linii, ci au o oarecare lăţime finită, iar intensitatea lor luminoasă scade treptat de la un maxim corespunzător liniei lor centrale. Dacă benzile sînt prea late sau se apropie prea mult între ele, atunci se întretaie şi nu se mai pot distinge unele de altele. Cu cît este mai mică constanta reţelei şi mai mare numărul de linii trasate, cu atît devin mai vizibile benzile şi cu atît mai mare va fi „puterea separatoare" a reţelei. Desigur că şi cea mai perfectă reţea *Rowland* nu este suficientă pentru măsurarea lungimilor de undă din domeniul razelor Roentgen, care au lungimi de undă cu mult mai mici decît lumina vizibilă. Din fericire, însăşi natura ne vine în ajutor. Pentru determinarea lungimilor de undă ale razelor Roentgen (fig. 34), cristalele substanţelor constituie reţelele necesare. S-a constatat că elementele componente ale cristalelor — atomi sau molecule — sînt aşezate perfect regulat, sub formă de reţea, iar constanta reţelei — distanţa dintre două elemente componente — este de ordinul de mărime a razelor Roentgen. Este evident că reţelele cristaline nu sînt cu o singură dimensiune, ca cele considerate pînă în prezent, şi obţinute prin repetarea regulată a unor elemente într-o singură direcţie, ci sînt tridimensionale. Din această cauză, lumina nu poate să mai cadă întîmplător pe reţeaua cristalină, ci numai într-o anumită direcţie, care depinde de structura internă a cristalelor. Invers, prin expunerea în faţa razelor Roentgen a diferitelor materiale, se pot trage concluzii asupra structurii materialului res-

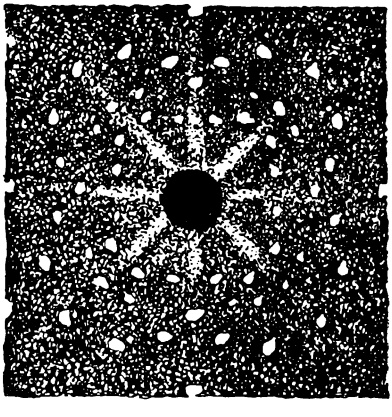


Fig. 34. — Difracţie produsă prin iradierea unui cristal cu ajutorul razelor Roentgen

pectiv pe baza fenomenelor de interferenţă obţinute. Această metodă este folosită din ce în ce mai mult în industria metalurgică şi textilă.

Toate aceste constatări au la bază concepţia că lumina este o mişcare ondulatorie în cîmpuri electrice. S-a constatat că oscilaţiile undelor luminoase se produc transversal, perpendicular pe direcţia de propagare a undelor. *Huygens* se gîndea şi la posibilitatea unor unde longitudinale, a căror oscilaţie, ca şi la undele acustice, se produce în direcţia de propagare a undei.

După cum s-a constatat în anul 1820 de către danezul *Oersted*, cîmpul electric este însoţit de cîmpul magnetic. *Oersted* lasă să treacă un curent electric continuu printr-o sîrmă şi observă că în acest caz un ac magnetic deviază (fig. 35); aşadar la trecerea curentului electric prin sîrmă ia naştere un cîmp magnetic. Dacă însă există această legătură între un cîmp electric şi un cîmp magnetic, se pune întrebarea dacă nu cumva şi undele magnetice sînt unde luminoase. Se constată însă că nu este cazul; efectele luminoase se datoresc exclusiv componentelor electrice ale undelor electromagnetice.

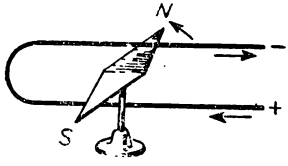


Fig. 35.

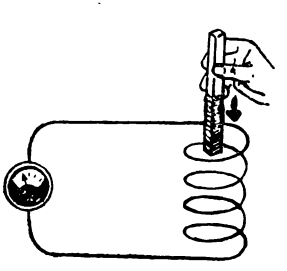


Fig. 36.

După descoperirea lui *Oersted*, *Faraday* a căutat neobosit timp de zece ani producerea fenomenului invers. Era de aşteptat că într-un fel oarecare cîmpurile magnetice să fie legate de cîmpurile electrice. Aşa după cum cu ajutorul curentului electric se putea produce magnetism, tot aşa trebuia să se producă electricitate prin magnetism. A stabili acest lucru era foarte greu şi se spune că *Faraday*, pentru a-şi aminti mereu această problemă, a purtat ani de zile în buzunar o bucată de fier şi o bucăţică de sîrmă de cupru. Soluţia problemei, pe care în sfîrşit a găsit-o, era următoarea: dacă apropiem un magnet de un inel format dintr-o sîrmă de cupru, atunci inelul este străbătut de un curent electric

(fig. 36). De asemenea, dacă se îndepărtează magnetul, inelul este străbătut de un curent. Mărirea sau micşorarea unui cîmp magnetic, în general variaţia intensităţii acestuia, produce deci un curent electric, adică un fenomen invers celui descoperit de *Oersted*. Electromotorul şi dinamul reprezintă valorificarea acestei minunate descoperiri, care uneşte pentru totdeauna cele două domenii separate înainte, ale electricităţii şi magnetismului.

Ideile lui *Faraday* erau însă greu accesibile contemporanilor săi. Aceştia erau obişnuiţi cu acţiunile la distanţă, asemănătoare forţei gravitaţionale; deci, şi forţele electrice şi magnetice trebuiau să se exercite direct şi imediat în vid. Împotriva acestei păreri *Faraday* a dezvoltat ideea unor cîmpuri electromagnetice care se propagă de la un punct la altul. Viteza de propagare este finită, astfel că nu se poate vorbi de un efect instantaneu. Pe lîngă faptul că această idee părea destul de neobişnuită şi greu de conceput, înţelegerea ei de către fizicienii contemporani a fost încă şi mai mult îngreunată de faptul că *Faraday* nu a fost în stare să dea noilor sale idei o formă care să poată fi verificată cantitativ, aceasta fiind singura formă care putea fi înţeleasă. Aceasta s-a produs de-abia datorită lui *Maxwell*, tot atît de capabil ca şi *Faraday*, care cu o jumătate de secol mai tîrziu a stabilit ecuaţiile fundamentale ale electromagnetismului, pe baza noţiunilor de cîmp ale lui *Faraday*.

Aci noi întîlnim o situaţie, observată deseori în istoria fizicii. Ecuaţiile celebre ale lui *Maxwell* formează exprimarea matematică a concepţiilor lui *Faraday*, asupra electricităţii şi magnetismului, concepţii care la acesta din urmă au apărut mai întîi într-o formă pur fizică. Tot aşa, reprezentările lui *Huygens* şi *Fresnel* exprimau o stare de lucru într-o formă evidentă, pur fizică, pe care mai tîrziu *Kirchhoff* a concretizat-o în formulele sale. Sînt necesare două aptitudini deosebite pentru a considera o stare de lucruri: una mai mult din punct de vedere matematic şi alta mai mult din punct de vedere fizic. Aceste aptitudini se unesc numai rareori în aceeaşi persoană; în majoritatea cazurilor ele înclină să se combată. Istoria fizicii este bogată în astfel de exemple. Am arătat mai înainte un extras dintr-o scrisoare a lui *Daniel Bernoulli*, din care reiese cu claritate

acest lucru. Însă chiar şi în zilele noastre se pot arăta cu uşurinţă asemenea exemple.

Se pare că motivul adevărat al adversităţii faţă de mecanica cuantică trebuie căutat în faptul că adversarii acestei teorii au mai mult aptitudini pentru fizică şi mai puţin pentru matematică. Însă cele două aptitudini nu ar trebui să se combată, ci să se completeze, pentru ca astfel să se poată crea teorii grandioase, ca aceea a electromagnetismului, fără de care nu s-ar putea concepe civilizaţia noastră. Natura a pus matematicienilor probleme care au putut fi rezolvate de un *Kirchhoff* sau un *Maxwell*. Numai matematica face posibilă exprimarea întregului electromagnetism în cele cîteva formule ale lui *Maxwell*. La ele se referea marele fizician *Boltzmann* cînd a citat, plin de entuziasm, cuvintele din Faust al lui *Goethe* :

> Ah ! cîtă fericire izvorăşte în această privire...
> Era un zeu acela care a scris aceste rînduri
> Care cu un imbold misterios
> Mi-a dezvăluit forţele naturii din jurul meu ?

Din punct de vedere pur teoretic, *Maxwell* a mers mai departe decît *Faraday* şi a susţinut că lumina vizibilă este înrudită cu excitaţiile electrice de lungime mare de undă ale cîmpurilor electromagnetice, calculate de el, denumite astăzi unde radiofonice. A fost necesară o mare iscusinţă experimentală pentru a produce astfel de unde şi a cerceta însuşirile lor. Un elev al lui *Helmholtz*, *Heinrich Hertz*, a reuşit acest lucru. Aparatura sa experimentală, care face parte din piesele preţioase ale Institutului de fizică de la Bonn, avea o bătaie de 4 pînă la 5 metri. În receptorul acestui model primitiv al aparatului de radio se produc nişte mici scîntei, care pot fi văzute numai cu ajutorul unei lupe. Afirmaţia lui *Maxwell* a fost confirmată şi prin aceasta *Hertz* a ajutat la izbînda acestei teorii.

Însă ca şi în cazul mecanicii clasice, s-a constatat curînd că şi această teorie are nevoie de îmbunătăţiri. Au apărut idei cu totul noi, însă totul pare să fie cu mult mai complicat decît în teoria relativităţii şi deci mult mai dificilă o explicaţie mulţumitoare. Să vedem în ce constă această problemă.

Apare ca o ironie a soartei faptul că acelaşi *Hertz*, care contribuise la succesul teoriei lui *Maxwell*, să facă o descoperire capabilă să dărîme măreţul edificiu abia construit. *Hertz* a descoperit că la lumină, scînteia electrică străbate lungimi de spaţiu pe care nu le poate străbate în întuneric. Cîrd *Hallwachs* şi în special *Lénard* cercetară acest fenomen mai de aproape, au descoperit drept cauză existenţa fenomenului fotoelectric.[1] Prin acest fenomen se înţelege emiterea de electroni de către un metal expus unor unde luminoase. Energia cinetică a electronilor creşte cu frecvenţa undelor luminoase folosite, în timp ce intensitatea luminii acţionează numai asupra numărului electronilor emişi. Aceasta reprezenta o surpriză. Conform legii conservării energiei, trebuia să presupunem că electronii posedă cu atît mai multă energie, cu cît este mai puternică iradierea metalului. Realitatea era, însă, alta.

Situaţia a fost arătată foarte clar de o experienţă făcută de *Millikan* în anul 1916. Acesta a stabilit un potenţial pozitiv unei plăci metalice care emitea electroni atunci cînd era iluminată. *Millikan* a mărit potenţialul plăcii pînă cînd înceta emisiunea chiar şi a celor mai rapizi electroni din placa metalică. El a putut stabili acest lucru cu ajutorul unui electroscop care, aşezat la o oarecare distanţă în faţa plăcii metalice, nu se încărca (fig. 37). Energia cinetică a electronilor cei mai rapizi se putea determina prin măsurarea tensiunii plăcii metalice. De aci a rezultat proporţionalitatea energiei cinetice a electronilor cu frecvenţa,

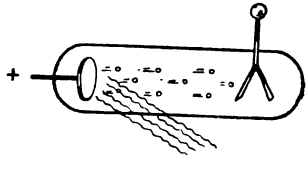


Fig. 37.

[1] Cercetările sistematice ale lui A. G. Stoletov (1888) au contribuit la lămurirea fenomenului fotoelectric. El a fost acela care a aplicat pentru prima oară mici diferenţe de potenţial electrozilor; . . . „am încercat să văd — spunea Stoletov — dacă se obţine sau nu o asemenea acţiune în cazul unei electricităţi la diferenţe mici de potenţial... Încercarea mea a dat rezultate superioare celor aşteptate". (Citat după Landsberg, op. cit., pag. 477). Rezultatele cercetărilor lui Stoletov au fost confirmate ulterior. Ele au fost formulate sub formă de legi şi şi-au păstrat pînă astăzi importanţa. *(N. R.)*

ţinîndu-se însă seama că această energie cinetică apare micşorată cu o oarecare cantitate, datorită faptului că la ieşirea electronilor din placa metalică aceştia au de învins o rezistenţă. Această pierdere de energie se numeşte „lucru mecanic de ieşire" şi depinde de natura metalului folosit.

Acest fenomen nu concordă cu teoria lui *Maxwell*. Pentru explicarea lui trebuie să ne închipuim, conform ipotezei lui *Einstein*, că lumina se compune din particule foarte mici de energie, numite fotoni. Lumina, ale cărei culori componente sînt caracterizate prin frecvenţa ν, se compune dintr-o mulţime de fotoni egali, perfect identici. Energia fiecărui foton este egală cu $h\nu$, în care h este un factor de proporţionalitate — acelaşi pentru toate culorile spectrului — numit constanta lui *Planck* şi de valoare de $6{,}63.10^{-27}$. Prin urmare, există fotoni care reprezintă o energie mai mare sau mai mică, după mărimea lungimii de undă a culorii din spectru. Desigur că ν se poate alege întotdeauna astfel, încît $h\nu$ să capete orice valoare dorită. Pentru lumina vizibilă, valoarea energiei $h\nu$ este cuprinsă între 25 şi 46 zecimi de bilionimi de unităţi de energie. Pentru comparare, se indică că unitatea de energie, „ergul", este şi ea foarte mică şi anume este egală cu lucrul mecanic necesar pentru a ridica gămălia unui ac, grea de o miime de gram, la o înălţime de 1 cm.

Cît de greu ne putem familiariza cu astfel de idei ştiinţifice revoluţionare reiese din însăşi cuvintele cu care *Millikan* şi-a încheiat raportul asupra efectului termoelectric : „Nu-i mai puţin adevărat că această teorie fizică mi se pare cu totul de nesusţinut". *Millikan* s-a dovedit a fi un profet mincinos. Teoria fizică iniţiată de el s-a dezvoltat într-un ritm rapid şi a condus la consecinţe la care pînă atunci nimeni nu ar fi îndrăznit nici măcar să gîndească. Imboldul pentru astfel de idei revoluţionare, mai întîi asupra naturii luminii şi scurt timp după aceea asupra structurii materiei, a fost dat de o problemă de radiaţie. O sobă încălzită radiază căldură, nu însă şi lumină ; un chibrit care arde radiază, ca şi soarele, atît căldură cît şi lumină. Radiaţia înseamnă însă energie şi de aceea se pune întrebarea cum sînt distribuite pe fiecare culoare spectrală în parte cantităţile de energie radiate de la o sursă, în special în cazul cînd această sursă este un corp

negru. Corpul negru nu are o existenţă reală ; el este o creaţie a fizicienilor teoreticieni. Din punct de vedere al comportării lui, corpul negru se aseamănă cu un spaţiu gol, vopsit în interior în negru şi prevăzut cu o mică deschizătură. Să ne închipuim că interiorul spaţiului gol este plin de radiaţii, pereţii sînt opaci, iar în spaţiul gol există o particulă foarte mică de cărbune. După cîtva timp se stabileşte o stare de echilibru ; pe scurt, se spune că avem de-a face cu „radiaţii ale corpului negru". În al nouălea deceniu al secolului trecut s-a căutat să se determine distribuţia cantităţii de energie pentru fiecare culoare din această „radiaţie a corpului negru" şi în acest scop s-au efectuat măsurători minuţioase. În felul acesta au fost obţinute rezultate pe cale experimentală. Cînd s-a încercat, însă, să se explice teoretic rezultatele experimentale, s-a constatat că teoria lui *Maxwell* nu putea fi folosită.

Cu ocazia unei întîlniri prieteneşti, un vestit experimentator din domeniul fizicii se plînse de această situaţie profesorului de fizică teoretică de la universitatea din Berlin, *Max Planck*. În ziua următoare el primi o carte poştală cu o formulă pe care mai tîrziu *Planck* putu să o explice cu ajutorul unei ipoteze complet noi; din păcate, această scrisoare unică s-a pierdut. Ca importanţă, cu toate că nu şi în privinţa perfecţiunii, această scrisoare poate fi considerată tot atît de importantă ca şi însemnările lui *Leibniz* în care erau introduse pentru prima oară semnele *d* şi ∫. Formula despre care era vorba a fost numită după numele lui *Planck*, iar noua ipoteză formează ideea fundamentală a teoriei cuantelor. Această teorie a fost publicată la 14 decembrie 1900.

Prin aceasta, *Planck* a înlăturat principiul exprimat prin cuvintele „natura non facit saltus", adică natura nu face salturi. Contrar acestui principiu, *Planck* s-a văzut obligat să presupună că absorbţia şi emisia de lumină se produc în salturi. Un atom oarecare poate absorbi numai o anumită cantitate de energie luminoasă şi poate emite numai o cantitate de energie egală cu cea absorbită. Aceste cantităţi de energie sînt fotonii. Datorită acestui fapt, se poate uşor explica descoperirea lui *Bunsen* şi *Kirchhoff*, care stabiliseră pe cale experimentală că fiecare gaz emite anumite radiaţii şi poate absorbi numai aceleaşi radia-

ţii. După cum se ştie, această descoperire formează baza analizei spectrale, care permite cercetarea compoziţiei stelelor.

În glumă, s-ar putea spune că pentru fiecare fel de atom este prescrisă o anumită dietă. Atomii pot să înghită numai anumite fragmente de energie. În această privinţă, atomilor le merge mai bine decît celorlalţi pacienţi, care adesea păcătuiesc împotriva prescripţiilor dietetice. Fotonii constituie hrana atomilor, aceasta nefiind însă de loc unitară. Fotonii care pot fi absorbiţi de atomii de hidrogen sînt complet indigerabili pentru atomii de carbon. Acest fel de a privi problema este în completă contradicţie cu teoria lui *Maxwell*, care nu cunoştea existenţa fotonilor. Numai dacă ne gîndim la importanţa hotărîrii de a renunţa la o teorie oarecum verificată, precum şi la felul în care erau interpretate observaţiile făcute asupra naturii, interpretări care susţineau că ar fi posibile numai modificări continue, se va putea aprecia în mod just meritul lui *Planck*. *Planck* însuşi se descrie ca „un minier care ani de zile îşi foloseşte toată forţa lui săpînd în căutarea unor minereuri preţioase şi căruia într-o zi, în timpul lucrului, i se întîmplă să dea peste un filon, care la o cercetare mai amănunţită se dovedeşte a fi cu mult mai bogat decît ar fi putut bănui cineva mai înainte. Dacă nu ar fi găsit el comoara, ar fi reuşit desigur s-o găsească puţin mai tîrziu unul dintre tovarăşii săi". Ultima frază dovedeşte mai mult modestia lui *Planck*, decît faptul că el ar fi apreciat just dificultăţile învinse, deoarece este mai mult decît îndoielnic că altul ar fi reuşit aşa de curînd să facă această descoperire.

După noua concepţie, lumina se compune din atomii de lumină, numiţi fotoni. Un foton întruchipează energia $h\nu$. Din teoria relativităţii se ştie, însă, că fiecărei cantităţi de energie îi corespunde o masă, care se obţine din împărţirea energiei prin c^2. Deci fotonul $h\nu$ posedă masa $\frac{h\nu}{c^2}$. În afară de aceasta, fotonul are o viteză, anume viteza c. Dacă fotonul întîlneşte un obstacol, va ciocni acest obstacol aşa precum o bilă de biliard se ciocneşte de marginea mesii de biliard. Evident că în cazul luminii, obstacolul este ciocnit în acelaşi timp de nenumăraţi fotoni, ceea ce se exteriorizează printr-o presiune foarte mică, însă constantă, asupra obstacolului şi anume prin presiunea

luminii. Prin urmare, lumina exercită o presiune; deci un flux luminos suficient de puternic ar mătura orice obstacol. Această presiune era cunoscută încă din teoria lui *Maxwell*; conform noii concepţii, ea rezultă însă de la sine şi fără mult calcul.[1]

Aci, un cititor atent ar rămîne nedumerit. Fotonii se mişcă cu viteza c, la care fiecare masă finită ar trebui să atingă o valoare infinit de mare, în timp ce fotonii trebuie să aibă o masă întotdeauna finită. Pentru a ocoli această dificultate, savanţii s-au văzut obligaţi să presupună că masa de repaus a fotonilor dispare. Prin aceasta se creează însă o nouă dificultate, deoarece zero înmulţit cu o valoare oricît de mare $\frac{1}{\beta}$ dă tot zero. Trebuie recunoscut că aceasta formează un punct sensibil pentru noua concepţie, o dovadă că pînă în prezent nu s-au putut obţine ultimele cunoştinţe asupra naturii luminii.

Cîteva din legile valabile în optică sînt suficiente pentru a ajurge la o concepţie mai profundă a fenomenelor atomice. Încă de mult timp se ştia că fiecare substanţă posedă o structură atomică. Cum s-ar putea altfel explica compresibilitatea materiei? Cu timpul, s-a ajuns la convingerea că substanţa vizibilă se compune din particule foarte mici, invizibile, care se mişcă dezordonat, ca un roi de musculiţe. Mişcările repezi ale acestor particule se manifestă prin căldură, cele încete, prin răceală. Prin această ipoteză au putut fi explicate în mod satisfăcător multe probleme. Astfel s-a născut o nouă ramură a ştiinţei, numită teoria cinetică sau statistică a materiei. Această ramură necesită

---

[1] Demonstrarea experimentală a presiunii luminii se datoreşte lui P. N. Lebedev (1866—1912), care face o primă comunicare a lucrărilor sale în anul 1899, la un congres din Elveţia şi o a doua, la Paris, în anul 1900. Experienţele lui Lebedev, exemplu de artă experimentală, au fost efectuate la Moscova. Aparatul lui Lebedev consta dintr-un fir de suspensie (la capătul căruia sînt prinse aripioare foarte subţiri şi uşoare, dintre care una înnegrită şi alta lucie), o sursă de lumină (lampă cu arc), dispozitiv de schimbare a direcţiei razelor, dispozitiv de măsurare a unghiului de torsiune, cameră cu vid. Măsurările lui Lebedev au dat valori care concordau destul de bine cu teoria lui Maxwell. Experienţele au fost repetate, mulţi ani mai tîrziu, cu mijloace mai fine, obţinîndu-se o concordanţă şi mai bună între valorile obţinute experimental şi previderile lui Maxwell. *(N. R.)*

raţionamente pe care matematicienii le aveau la dispoziţie din calculul probabilităţii.

Bazele calculului probabilităţii îşi are originea în pasiunea jocurilor de noroc. Un nobil francez, cavalerul *de Méré*, care atunci cînd nu dormea juca cărţi, a găsit ocazia să facă observaţii asupra posibilităţilor de cîştig sau pierdere, care i se părură că nu sînt numai o întîmplare. El le comunică tînărului şi vestitului matematician *Pascal*. Acesta şi, independent de el, contemporanul său *Fermat* au dezvoltat bazele unei ştiinţe a probabilităţii.

Noţiunea de bază o formează probabilitatea. Din şcoală se mai ştie încă ce înseamnă aceasta. La jocul cu zaruri există probabilitatea de 1/6 de a nimeri un anumit număr. Aceasta nu trebuie înţeles că la aruncarea zarului, întotdeauna din cele şase aruncări una este cea dorită. Este perfect posibil, deşi se întîmplă rareori, ca din o mie de aruncări să nu fie nici una cea cu numărul ales. O probabilitate nu înseamnă în consecinţă o certitudine. Probabilitatea pretinde numai că la un număr crescînd de aruncări a zarului, procentul numărului urmărit tinde către a şasea parte din toate aruncările de zar. De aceea, probabilitatea 1 nu reprezintă încă o certitudine în sensul general, iar probabilitatea zero nu înseamnă că un anumit caz nu se va produce niciodată.

Probabilitatea formează pîrghia pe care se sprijină teoria cinetică a materiei. Lui *Boltzmann* îi revine meritul de a fi realizat primul, corect, acest lucru. O lege, care poartă numele lui şi a predecesorului său, *Maxwell*, indică probabilitatea de a întîlni într-un loc dat particule date ale unui gaz avînd o viteză dată. Astfel de indicaţii sînt bazate pe o anumită metodă de numărare sau, cu alte cuvinte, pe o convenţie anterioară asupra a ceea ce trebuie considerat ca diferit şi ce, ca egal. Din această cauză, prima metodă de numărare, datorită lui *Boltzmann*, se numeşte metoda clasică. Dacă considerăm lumina ca un gaz compus din fotoni, metoda clasică de numărare nu mai este valabilă. Indianul *Bose* a descoperit o nouă metodă de numărare, care se poate folosi în cazul luminii şi în baza căreia se ajunge la legea lui *Planck* pentru radiaţia corpului negru. Se obişnuieşte ca această metodă de numărare să fie denumită statistica lui *Bose* sau a lui *Bose-Ein-*

stein, spre deosebire de statistica lui *Boltzmann*. Mai tîrziu, s-a descoperit a treia metodă de numărare, care este indicată în special pentru metale. Această metodă este denumită astăzi statistica lui *Fermi-Dirac* şi ea dă relaţii asupra însuşirilor electrice şi termice ale metalelor ; la începutul secolului al XX-lea, *Drude*, profesor de fizică la Berlin, s-a sinucis din cauză că nu i-a reuşit soluţionarea acestei probleme.

Tratarea din punct de vedere statistic a unei probleme face ca toate afirmaţiile să aibă întotdeauna un caracter de probabilitate şi, în consecinţă, să nu ducă niciodată la previziuni univoce. Previziunile se referă, întotdeauna, mai curînd asupra comportării unui număr foarte mare de particule, aşa-zise colective ; ele nu sînt însă valabile pentru particule individuale. Dacă se spune, de exemplu, că există probabilitatea 1 de a găsi toate particulele într-un spaţiu anumit, aceasta nu înseamnă că într-un spaţiu aflat în afara acestuia nu se poate găsi nici o particulă. Cauza acestei situaţii se datoreşte neştiinţei noastre. Într-adevăr, noi considerăm cunoscute legile mişcării punctelor materiale clasice, fără a fi, totuşi, în măsură să urmărim comportarea fiecăruia dintre aceste puncte. Privit din punct de vedere clasic, neştiinţa se datoreşte lipsei noastre de capacitate de a pătrunde pînă la fiecare particulă în parte. În curînd se va vedea că fizica atomică procedează cu mult mai radical în această problemă.

Dacă însă metoda statistică nu asigură nici o precizare univocă, atunci ea pare să contrazică condiţia de cauzalitate. Aceasta numai aparent. Metoda de tratare statistică trebuie să renunţe de la început la cauzalitate, deoarece ea are de-a face cu colective de particule, ceea ce înseamnă că de la început îi este indiferentă soarta fiecărei particule considerată separat. Asigurările pe viaţă lucrează în mod asemănător cu colective de indivizi şi de aceea sînt rentabile, fără ca ele să poată prevedea dacă o persoană asigurată va trăi 60 sau 80 de ani. De altfel, nici nu s-a pus vreodată problema de a schimba metoda tratării statistice a problemelor prin fenomene cauzale.

În anul 1927 se părea că s-a terminat cu cauzalitatea, deoarece noile legi stabilite atunci de fizica atomică nu mai admiteau previziuni univoce. Aceste legi însă pot fi verificate numai la colective de indivizi. Niciodată nu se

pot cunoaşte particule izolate. Noi nu ne îndoim de existenţa lor, însă nu ştim căror legi s-ar supune o particulă izolată, nu ştim nici măcar dacă are într-adevăr vreun sens să ne închipuim o particulă individuală existînd independent. Ceea ce cunoaştem sînt legile cărora li se supun particulele care se găsesc în cadrul colectivelor de particule. Acestea se comportă astfel ca şi cînd legile valabile pentru colective de particule ar fi valabile şi pentru fiecare particulă în parte. În acest caz însă, nu se pot trage concluzii nici pro, nici contra cauzalităţii ; toată discuţia a depăşit cadrul literaturii de specialitate şi dovedeşte prin aceasta că a fost dusă neprincipial, fiind numai o vorbărie.

După această introducere, a venit timpul să ne reîntoarcem la noile legi. Făcînd cunoştinţă cu ele, avem senzaţia de a fi evadat dintr-o cuşcă în care mintea noastră fusese prizonieră pînă atunci. Noua fizică atomică a fost fondată de *Louis de Broglie* în lucrarea sa de doctorat din anul 1924, prin introducerea noţiunii revoluţionare şi îndrăzneţe a „undelor materiale". Să încercăm să explicăm această noţiune. Pentru aceasta se porneşte cel mai bine de la natura dublă a luminii, despre care s-a vorbit mai înainte. Lumina, după cum o dovedesc experienţele de difracţie, poate fi explicată ca o mişcare ondulatorie care satisface ecuaţia undelor. Pe de altă parte, experienţele legate de efectul fotoelectric şi a radiaţiei corpului negru ne obligă să atribuim luminii o structură atomică ; lumina se compune din fotoni cu o energie $h\nu$ şi un impuls $h\,k$. Aceste două afirmaţii par complet contradictorii. Cu toate acestea, dacă vrem să explicăm totalitatea fenomenelor optice avem nevoie de ambele afirmaţii. Nici teoria ondulatorie a luminii şi nici teoria fotonilor, fiecare luate în parte, nu sînt suficiente pentru acest scop. Siliţi de împrejurări, ne mulţumim să spunem: lumina are o natură dublă, apărîndu-ne uneori şi sub formă de particule, adică de fotoni.

Lui *de Broglie* această „existenţă dublă" a luminii i se păru de esenţă fundamentală, ca fiind o indicaţie extrem de importantă asupra naturii reale a lumii. Se mărgineşte oare acest rezultat numai la lumină ? Nici ecuaţia undelor şi nici noţiunile de impuls şi energie nu aparţin numai opticii. De aceea, să încercăm să le aplicăm şi în cazul particulelor materiale, de exemplu în cazul electronilor. O particulă elementară

în mişcare posedă în mod normal energie şi impuls; aceasta o admite şi mecanica clasică. În mod formal, să considerăm acum energia sa $E = h\nu$ şi impulsul $I = mv = h\,k$. Aceste două ecuaţii ne dau o „frecvenţă" ν şi o „lungime de undă" $\lambda = \frac{1}{k}$. Desigur că nu ştim încă cărei „unde" trebuie să-i corespundă în fond aceste două mărimi. *De Broglie* spune : după cum unui foton îi corespunde o anumită undă luminoasă, tot aşa şi unei particule elementare în mişcare trebuie să-i corespundă o anumită „undă materială" — fără ca, deocamdată, să ne preocupăm ce se înţelege în fond prin aceasta. Frecvenţa ν şi lungimea de undă λ a acestor unde materiale se pot calcula, după cum am arătat mai înainte. Ele sînt $\nu = \frac{E}{h}$ şi $\lambda = \frac{h}{mv}$. Dacă se consideră că şi aceste unde materiale satisfac ecuaţia undelor, atunci legea propagării lor se poate determina printr-un calcul simplu : rezultatul este cunoscuta ecuaţie a lui *Schrödinger*, care trebuie privită ca baza fizicii atomice moderne.

În felul acesta şi materiei i se atribuie aceeaşi esenţă dublă ca şi luminii. La început, prin aceasta pare să nu se fi obţinut nimic nou, ci poate chiar o complicare a problemei. Dacă materia era înainte cel puţin „cuminte", acum amîndouă, atît lumina cît şi materia, sînt supuse aceleiaşi dileme ; ambele sînt în acelaşi timp şi unde, şi particule. Totuşi, aceasta reprezintă un pas către o nouă unitate superioară şi ne conduce către o concepţie mai profundă a naturii. De altfel nu ar avea nici un rost aplicarea în fizică a politicii struţului de închidere a ochilor în faţa problemelor nerezolvate. Vom vedea că în măsura în care ne putem libera de vechile prejudecăţi, dificultăţile nu sînt chiar atît de mari.

Iniţial, ecuaţia undelor nu a fost dedusă atît de uşor. Aceasta a fost stabilită în anul 1926 de *Schrödinger*, în baza unor raţionamente bazate în special pe ideile pe care le dezvoltase cu un secol înainte irlandezul *Hamilton*. Ele se referă la unele analogii care există între mecanică şi optică. *Hamilton* era mai mult matematician şi cercetările lui aveau în special scopul să ajungă la o soluţie a ecuaţiilor,

care în mecanica clasică determină mişcarea sistemelor de puncte. Aceste ecuaţii pot fi scrise sub diferite forme şi poartă atunci numele aceluia care le-a stabilit mai întîi, adică ecuaţiile lui *d'Alembert*, ecuaţiile lui *Lagrange* sau ecuaţiile lui *Hamilton*. Dacă creaţia lui *Hamilton* era de domeniul matematicii, totuşi i-a reuşit o previziune din domeniul opticii, pe care colegul său *Lloyd* a putut s-o confirme experimental şi care este cunoscută astăzi sub numele de „refracţie conică".

Aceste cercetări au fost publicate de *Hamilton* în rapoartele Academiei irlandeze de ştiinţe. Chiar şi pe atunci exista un număr atît de mare de reviste ştiinţifice, încît cititorii erau siliţi să şi le aleagă. Nici un cercetător nu putea să urmărească toate articolele şi din această cauză ei citeau numai pe acelea care apăreau în revistele cele mai importante. Articolele care apăreau în reviste mai puţin răspîndite erau citite numai atunci cînd, în mod excepţional, se atrăgea cuiva atenţia asupra lor. Chiar şi citirea regulată de către cercetători a tuturor comunicărilor din revistele importante era dificilă şi de aceea se putea întîmpla ca şi între acestea să se omită unele articole foarte importante. Unul dintre cei mai geniali matematicieni ai tuturor timpurilor, *Évariste Galois*, contemporan cu *Hamilton*, îşi publica articolele într-o revistă foarte importantă, *buletinul lui Férussac*, totuşi lucrările sale nu au fost luate în seamă. Astăzi, ele sînt considerate printre cele mai profunde în domeniul algebrei. Desigur că lucrările lui *Galois* nu erau uşor de citit, însă în orice caz nu atît de greu de înţeles cum i se reproşase de către Academia franceză, deoarece numai zece ani după moartea tînărului autor, un matematician cunoscut, *Liouville*, a relevat cu claritate importanţa acestora. Dacă *Galois* ar fi fost mai bine cunoscut de colegii săi din posturi de conducere, fără îndoială că nu i s-ar fi întîmplat să rămînă necunoscut. Iar dacă *Hamilton* ar fi întreţinut relaţii mai strînse cu colegii săi, atunci cercetările sale nu ar fi apărut ciuntite în literatura contemporană de specialitate. Sugestiile cercetătorului, în viaţă, par deseori să nu depăşească graniţa de 500 kilometri, la fel ca şi dorul dragostei, pentru care se dă sfatul de a călători pentru a uita. În ultimul timp se pare, însă, că distanţele de la cercetător la cercetător s-ar micşora.

A sosit timpul să explicăm mai exact sensul ecuației lui *Schrödinger*. Se știe că această ecuație se referă la particulele elementare, care se prezintă în colective de particule și care se comportă în acestea ca și cum fiecare particulă ar satisface ecuația lui *Schrödinger*. Aceasta duce la o modificare revoluționară a interpretărilor. Nu mai are nici un sens să se indice exact locul unde se găsește o particulă elementară. Are sens să se indice numai probabilitatea cu care poate fi găsită particula într-un loc. Conform acestei concepții, o particulă elementară poate fi găsită în același timp în orice loc. În primul moment aceasta pare aproape de neconceput, însă numai atîta timp cît vrem să înțelegem acest lucru cu ajutorul noțiunilor tradiționale. Trebuie însă să ne gîndim că aceste noțiuni provin din fizica de toate zilele. Însă dacă ne-am convins că percepțiile noastre se compun din fenomene complicate în care atomii joacă un rol important, atunci trebuie să reflectăm dacă aceste fenomene se mai pot supune unor legi care provin din cu totul altă lume sau dacă ele nu necesită legi proprii.

Desigur că la început s-a încercat să se aplice în fizica atomică aceleași noțiuni care s-au dovedit a fi fructuoase în fizica clasică. Conform acesteia, atomul este considerat ca un sistem solar în miniatură, în care electronii sînt planete și nucleul atomic, soarele. Prin această concepție s-a obținut, în mod parțial, succese frumoase. Nu s-a obținut însă o satisfacție deplină, deoarece au trebuit admise anumite restricții în aplicarea legilor clasice, restricții care nu puteau fi suficient motivate. Astfel, planetele (respectiv electronii) nu puteau să se rotească pe orice orbite în jurul soarelui (respectiv nucleul atomic), ci numai pe un număr foarte redus de anumite orbite; orice altă orbită le era „interzisă". Mecanica clasică nu cunoaște astfel de interdicții pentru planete.

De-abia anul 1927 a adus soluționarea acestor dificultăți. Această soluție afirmă că mărimile din domeniul fizicii, cum sînt poziția sau viteza, corespund unor scheme matematice anumite. Acestea se numesc operatori și pot avea mai multe valori în același timp. Pentru fiecare valoare posibilă este valabilă o anumită probabilitate, variabilă de la o valoare la alta. În acest caz avem de-a face cu

mărimi matematice cu totul speciale, cu totul deosebite de acelea de care se servește fizica clasică.

După cum s-a mai repetat în istoria științelor naturii, fizicienii au găsit gata pregătite noile noțiuni matematice. Ele fuseseră dezvoltate la începutul secolului al XX-lea pentru a rezolva cu ajutorul lor probleme pur matematice. Aceste noțiuni se aplicau într-un spațiu cu un număr infinit de dimensiuni, căpătînd numele creatorului lor, matematicianul *Hilbert* din Göttingen. Pentru cei neinițiați, spațiul lui *Hilbert* li se părea ceva de neconceput, însă după cum se constată și de această dată, numai atîta timp cît ne apropiem de el cu păreri preconcepute. Păreri preconcepute înseamnă însă noțiuni construite pentru un scop și aplicate la altul. Păşunile au nevoie de coasă și ogoarele de plug, mecanica clasică de calculul infinitezimal și mecanica atomică de calculul operațional. Diferențialele și integralele sînt valabile în spațiul obișnuit, iar operatorii în spațiul lui *Hilbert*. Este greu, însă trebuie să ne obișnuim cu acest mod de a uita cele învățate.

Din relațiile care există între operatori, în fizică rezultă un principiu demn de remarcat și cu urmări importante. Operatorii pot fi clasificați în categorii, în așa fel încît la formarea produsului dintre doi operatori din aceeași categorie ordinea operatorilor nu are importanță, spre deosebire de produsul ai cărui factori sînt luați din categorii diferite. Aceasta se exprimă astfel : operatorii aceleiași categorii sînt comutativi, în timp ce doi operatori din categorii diferite sînt totdeauna necomutativi. Această situație se manifestă la măsurarea valorilor posibile. Dacă măsurătorile trebuie să determine valori posibile ale unor mărimi din domeniul fizicii, ai căror operatori aparțin aceleiași categorii, aceștia nu se influențează reciproc, în timp ce la operatorii din categorii diferite se întîmplă contrariul. Pentru această influențare reciprocă se pot trasa chiar și limite. Se obișnuiește ca această influență să fie numită relație de nedeterminare, deoarece ca urmare a influențării reciproce nu este posibil să se măsoare în același timp valori precise pentru ambii operatori.

Locul și viteza unei particule elementare sînt mărimi din domeniul fizicii cărora le corespund operatori necomutativi. Cu cît se delimitează mai exact locul unde trebuie

să se găsească particula elementară, cu atît se cunoaşte mai neprecis viteza pe care o are această particulă. Dacă s-ar încerca să se mărească precizia poziţiei prin utilizarea ca unitate de măsură a luminii cu o lungime de undă mică, atunci trebuie luat în considerare că fotonii care compun această lumină au un impuls mai mare. Dacă fotonii întîlnesc în drumul lor particula elementară, o ciocnesc mai puternic şi prin aceasta îi modifică viteza. Acest raţionament are mai mult o valoare fictivă decît o valoare convingătoare, deoarece din acest raţionament nu rezultă valabilitatea relaţiei de nedeterminare, din motive principiale. În orice caz ea l-a condus pe *Heisenberg* la descoperirea relaţiei de nedeterminare. Prin aceasta, mecanica atomică şi-a încheiat un prim capitol.

Relaţia de nedeterminare, exprimată prima dată în anul 1927, formează baza unui rezultat care se utilizase cu mult înainte. De la început s-a încercat să se aplice primele legi din fizica atomică în teoria statistică, constatîndu-se cu această ocazie că această teorie trebuie modificată. Pînă atunci, spaţiul în care se efectuau observaţiile statistice, aşa-numitul spaţiu al fazelor, era împărţit în celule oricît de mici. În fizica atomică toate aceste celule trebuie să aibă o mărime anumită h^3. Cauza nu putea fi explicată în nici un caz cu ajutorul cunoştinţelor de atunci. Astăzi se ştie că această împărţire a spaţiului fazelor are aceeaşi semnificaţie ca şi relaţia de nedeterminare dintre poziţie şi viteză.

Despre măsurători trebuie să ne preocupăm mai îndeaproape. În fizica clasică este permis să se utilizeze orice fel de aparate de măsurare de precizie — de exemplu, o balanţă cu greutăţi —, care pot avea orice fracţiune dorită dintr-un gram. Astfel de greutăţi nu pot exista în fizica atomică, deoarece cele mai mici elemente constitutive ale naturii sînt particulele elementare cu mase perfect determinate. Această limită inferioară constituie cauza pentru care fizica nucleară susţine că măsurătorile sau, cu alte cuvinte, observatorul deranjează starea care trebuie determinată. Observatorul este un uriaş, un fel de *Guliver* în ţara piticilor, care provoacă stricăciuni fără voia lui; aşadar, a măsura este sinonim cu un amestec nepermis.

Aceste idei cu totul noi sînt legate de părerea că în lumea atomilor fenomenele se produc nu continuu, ci în

salturi. Această părere a apărut pentru prima oară în cazul luminii formată din fotoni, sau, după cum se spunea atunci, din cuante de lumină. Această primă denumire a fost păstrată, astfel că astăzi se vorbeşte în majoritatea cazurilor despre fizica cuantică, căreia i se aduce învinuirea unor idei fantastice şi că se îndepărtează de orice realitate. Chiar şi primelor legi ale fizicii cuantelor li s-au adus aceleaşi învinuiri. Acum trei decenii, *Planck* se exprimase astfel în această problemă: „Sau constanta *h* este numai o mărime fictivă — şi atunci toată deducţia legii radiaţiilor este un principiu iluzoriu şi nu reprezintă decît un joc de formule fără conţinut — sau deducerea legii radiaţiei are la bază un raţionament just din fizică. În acest caz, factorul *h* trebuie să joace un rol de bază în fizică şi să anunţe ceva cu totul nou, ceva nemaiauzit mai înainte, menit să modifice din temelii raţionamentele noastre din fizică, care de la introducerea calculului infinitezimal de către *Leibniz* şi *Newton* erau bazate pe presupunerea continuităţii tuturor relaţiilor cauzale".

Este uşor de înţeles că la apariţia unor noutăţi revoluţionare se ridică la început obiecţii. Noutăţile cer o modificare în gîndire, care, fără îndoială, este greu de realizat. Evident că această cauză nu este citată şi nu se manifestă în mod conştient. Însă rolul pe care îl joacă rezultă din faptul că după efectuarea transformării gîndirii, obiecţiile dispar. Aşadar, obiecţiile nu sînt motivate obiectiv, ci sînt de ordin psihologic.

Evident că trebuie să existe motive convingătoare care să ne facă să trecem la concepţii noi. Aceste motive se pot datora atît neviabilităţii teoriilor vechi în faţa descoperirilor experimentale noi, cît şi unei concepţii noi, care să explice pe de o parte ceea ce se cunoaşte pînă în prezent, ducînd în acelaşi timp la noi rezultate controlabile. Primele motive existau atunci cînd *Planck* s-a decis să renunţe la teoria constanţei fenomenelor naturii, iar ultimele motive, atunci cînd *de Broglie* a introdus noţiunea undelor materiale. O consecinţă a existenţei undelor materiale o constituie faptul că la fel ca în cazul luminii, în cazul radiaţiilor compuse din particule materiale trebuie să existe fenomenul de difracţie. Acest lucru s-a confirmat şi pe cale experimentală. În anul 1927, *Davisson* şi *Germer* au lăsat să cadă

electroni rapizi pe un cristal, obținînd prin aceasta fotografii de difracții, întocmai ca cele produse cu ajutorul razelor Roentgen. Masa unui electron este de 9.10^{-28} g, astfel că la o viteză a electronilor de 10^{8} cm/s, lungimea undelor materiale corespunzătoare este, conform formulei lui de *Broglie*, de 7.10^{-8} cm, deci egală cu lungimea de undă a razelor Roentgen, pentru care cristalele formează, de asemenea, rețelele convenabile. Prin aceasta, noua teorie și-a trecut cu succes examenul. Mai tîrziu va trebui s-o urmărim în continuare, servindu-ne însă mai întîi de matematică atît cît este necesar pentru a putea apoi pătrunde mai adînc în fizică.

KANT :

În fiecare știință este numai atît de multă știință adevărată cîtă matematică conține.

RUSSEL :

Matematica este știința în care nu știi despre ce vorbești și nici dacă este adevărat ceea ce spui.

CITITORUL :

? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?

Matematicienii au fost consideraţi întotdeauna ca fiind nişte izolaţi. Se spune că ei ar fi străini de realitate şi că raţionamentele lor nu sînt înţelese de nimeni, cu excepţia lor înşişi şi probabil nici chiar de ei. Se înţelege de ce pe vremuri unii dintre ei au fost consideraţi ca vrăjitori sau au fost ucişi atunci cînd dădeau altora o învăţătură care depăşea posibilitatea de înţelegere a contemporanilor lor. Desigur că pentru evul mediu aceasta nu însemna prea mult; chiar în secolul al X-lea un profesor universitar avea nevoie de un an întreg pentru a-şi învăţa studenţii să adune, să scadă şi să înmulţească, cei mai talentaţi făcînd chiar şi împărţiri. Să nu ne închipuim că acel om nu era capabil.

Cîteva secole mai tîrziu lucrurile se schimbă. La avîntul mare pe care l-au luat toate ştiinţele naturii în acea vreme, matematica a contribuit în mod activ, avînd chiar un rol conducător. Am văzut cum se învăţa de la natură prin experienţe bine gîndite, cum i se puneau întrebări pline de sens şi în sfîrşit cum era privită ca un judecător suprem, care decide singur ce este just sau nejust. A fost nevoie de curaj şi calm pentru a se obţine eliberarea de autoritatea ştiinţei lui *Aristotel*. Imaginile atît de obişnuite nouă astăzi despre mişcările corpurilor au fost la început dezvoltate foarte anevoios. Chiar şi la *Galileu* găsim, la început, o părere greşită asupra mişcării uniform accelerate, părere pe care cinci ani mai tîrziu şi-a îndreptat-o — justificarea fiind însă falsă. Acest mers încet înainte, aceste prime încercări formate dintr-un amestec ciudat de adevăruri şi erori pot să dea o imagine a dificultăţilor învinse. În cursul acestei evoluţii se recunoaşte în matematică limbajul potrivit de exprimare a legilor naturii. Într-un timp relativ scurt se dezvoltă matematica superioară; antichitatea îşi găseşte stăpînul, noile învăţături depăşind cu mult reali-

zările grecilor în domeniul matematicii. În cele ce urmează vom vorbi despre această nouă matematică ca despre o ştiinţă exactă nu numai în concluziile ei, care sînt inatacabile, ci şi în măsura în care ea nu permite nici o lipsă în cunoaşterea ei. Aceasta ne obligă să începem cu ce este mai simplu.

Aproximativ acum o sută cincizeci de ani, un învăţător al unei şcoli primare a vrut să stea un moment netulburat şi de aceea a dat elevilor săi o problemă la care, după părerea lui, trebuiau să calculeze cam o oră. Era vorba să se adune primele o sută de cifre, prin urmare să se formeze suma cifrelor $1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$. Dacă nu ne gîndim la alte metode, atunci se adună 2 şi cu 1 care fac 3; la această sumă se adună 3, care fac 6; la 6 se adună 4, care fac 10 şi aşa mai departe pînă ce la urmă s-a adunat 100. În acest mod se obţine ca rezultat final cifra 5 050.

Unul dintre şcolari se gîndi la problema pusă şi observă că primul şi ultimul termen al sumei, adică 1 şi 100, fac împreună 101; acelaşi număr rezultă şi prin adunarea celui de-al doilea termen cu penultimul termen, adică 2 şi 99; la fel cel de-al treilea termen cu antepenultimul, 3 şi 98; şi aşa mai departe. El a trebuit numai să mai stabilească că primele o sută de numere se pot găsi în 50 astfel de perechi, căpătînd astfel rezultatul:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100 = 50 \cdot 101 = 5050$$

Acest elev avea atunci nouă ani şi se numea *Karl Friedrich Gauss*. El deveni mai tîrziu atît de renumit, încît a fost numit chiar pe cînd trăia „princeps mathematicorum" — regele matematicienilor.

În acest caz, îndepărtarea de la metodele obişnuite de calcul au dus surprinzător de repede la ţel. Un astfel de procedeu nu se limitează numai la acest caz individual, ci poate fi aplicat la orice şir de numere, dacă fiecare număr depăşeşte numărul precedent cu aceeaşi valoare. De exemplu, se poate calcula prin aceeaşi metodă suma tuturor numerelor pare $2 + 4 + 6 + \ldots + 28 + 30$, sau suma numerelor impare $1 + 3 + 5 + \ldots + 29$, sau chiar un şir de numere de felul: $17 + 34 + 51 + \ldots + 170$; cititorul ar proceda bine dacă în acest caz şi chiar mai tîrziu

ar forma aceste sume cu ajutorul metodei arătate ; matematica se învaţă numai atunci cînd cineva se ocupă singur cu ea.

Matematicianul numeşte astfel de şiruri de numere „progresii aritmetice" — sau, mai exact spus, „progresii aritmetice de gradul întîi". Se poate merge şi mai departe, cercetîndu-se şiruri cu mult mai complicate. Să examinăm, de exemplu, progresia compusă din numerele succesive care rezultă din ridicarea lor la puterea a treia — cubică. Din şcoală ne amintim că a ridica un număr la cub înseamnă a înmulţi acel număr de două ori prin el însuşi; în scrierea obişnuită înseamnă deci (se spune : unu la puterea a treia) $1^3 = 1$; $2^3 = 8$; $3^3 = 27$; $4^3 = 64$; $5^3 = 125$; $6^3 = 216$; $7^3 = 343$ şi aşa mai departe. Şirul nostru va fi deci :

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343....

Se observă că acest şir nu mai reprezintă o progresie aritmetică de gradul întîi, deoarece numerele cresc cu mult mai repede decît ar fi trebuit conform legii simple de formare a numerelor. Este însă uşor să transformăm noua progresie într-o progresie de tip vechi. Dacă se formează mai întîi diferenţele dintre două numere consecutive, deci 8 — 1, 27 — 8 ; 64 — 27 etc., se obţine şirul

7, 19, 37, 61, 91, 127.....

Dacă se repetă această operaţie şi se formează încă o dată diferenţele 19 — 7 ; 37 — 19 ; 61 — 37 ; 91 — 61 etc., rezultă şirul

12, 18, 24, 30, 36.....

În acest şir recunoaştem o progresie aritmetică de gradul întîi, fiindcă fiecare număr este mai mare decît numărul precedent cu aceeaşi valoare 6. Şirul iniţial al numerelor ridicate la cub — 1, 8, 27, 64 ..., de la care s-a pornit — poartă denumirea de „progresie aritmetică de gradul al treilea", deoarece numai din al treilea şir a rezultat o progresie de gradul întîi. Acest exemplu poate să dea o primă impresie asupra modului cum matematicienii se pot ridica de la forme simple de noţiuni la forme din ce în ce mai complicate. Acelaşi procedeu îl vom întîlni mereu, repetîndu-se în tot domeniul matematicii.

Se înţelege că, aşa cum mai înainte am căutat suma primelor o sută de numere, putem acum căuta suma primelor o sută de numere ridicate la puterea a treia. Este de presupus că la această problemă învăţătorul nostru l-ar fi pus în dificultate chiar pe micul *Gauss*, fără să mai vorbim de restul clasei. În realitate, dacă vrem să învăţăm în mod schematic, atunci ar trebui să calculăm mai întîi cuburile primelor o sută de numere, lucru destul de obositor, şi după aceea să adunăm numerele obţinute. Suma căutată se poate totuşi obţine uşor dacă se ţine seamă de particularităţile speciale ale problemei. Raţionamentul nostru se va servi de geometrie şi noi ne vom mărgini numai să determinăm suma primelor şapte numere ridicate la cub, acest procedeu putînd fi apoi imediat utilizat şi pentru numerele mai mari.

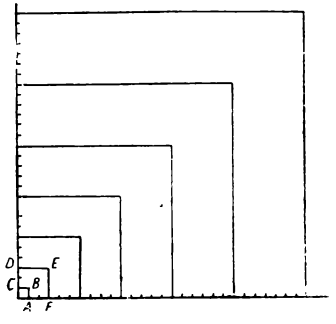


Fig. 38.

Să calculăm în figura 38, începînd de la colţul din stînga jos, suprafeţele porţiunilor consecutive. Mai întîi avem un pătrat cu latura 1. deci cu suprafaţa 1. După aceasta urmează o figură *ABCDEF*, denumită de greci gnomon, pe care ne-o putem închipui împărţită în două dreptunghiuri, a căror suprafeţe sînt 1 . 2 şi 2 . 3. Astfel, se obţine pentru suprafaţa gnomonului valoarea $2 + 6 = 8$, ceea ce este egal cu 2^3. În mod asemănător rezultă pentru restul gnomonilor valorile 3^3, 4^3 şi aşa mai departe. Pe de altă parte, aceste figuri completează exact pătratul cel mare cu laturile de $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$, a cărui suprafaţă este egală cu 28^2. Din aceasta rezultă ecuaţia

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 = 28^2$$

(suma gnomonilor) = (suprafaţa pătratului)

ca rezultat al problemei date. Este evident că acest rezultat nu se limitează numai la cazul primelor şapte numere ridicate la cub, ci se poate extinde mai departe, după plac. Pentru primele o sută de numere ridicate la cub rezultă imediat soluţia

$$1^3 + 2^3 + \ldots + 100^3 = 5050^2.$$

Demn de remarcat rămîne faptul că dintr-o sumă de numere ridicate la cub rezultă un număr ridicat la pătrat.

Constatarea făcută poate fi uşor cuprinsă în formule, dacă se utilizează calculul literal. Acestui calcul îi stă la bază constatarea importantă că în domeniul matematicii sînt valabile legi generale, independente de valorile întîmplătoare cu care avem de-a face. De exemplu, la orice adunare se poate schimba ordinea termenilor, fără ca suma lor să se modifice. Este evident că $2 + 3 = 3 + 2$, tot aşa $5 + 11 = 11 + 5$. Această proprietate se exprimă prin aceea că se notează primul termen cu a, al doilea cu b şi deci $a + b = b + a$; în acest caz a şi b pot avea valorile oricăror numere, relaţia rămînînd întotdeauna justă.

Calculul literal este un nou mod de exprimare, care trebuie învăţat şi exersat ca orice limbă. Cu ajutorul acestuia putem mai întîi să revenim asupra expresiei generale pentru suma primelor n numere. Pentru a obţine această expresie, se scriu mai întîi primele n numere într-o ordine dată şi dedesubt, în ordine contrară; apoi se adună numerele aflate unele sub altele:

$$\begin{array}{llll} 1, & 2. \ldots\ldots & n-1, & n, \\ n, & n-1. \ldots\ldots & 2, & 1, \end{array}$$

obţinînd întotdeauna valoarea $n + 1$. Există n astfel de perechi; suma *ambelor* şiruri este deci $n \,.\, (n + 1)$. Deoarece am ţinut seama de două ori de fiecare număr, rezultă pentru suma căutată $1 + 2 + \ldots + n$ valoarea pe jumătate, adică $\frac{1}{2} n\,(n + 1)$.

Dacă se calculează diferitele feluri în care se pot împerechea între ele $n + 1$ obiecte, se obţine acelaşi rezultat. Dacă sînt, de exemplu, 10 boxeri care trebuie să lupte fiecare contra celuilalt şi se caută să se calculeze numărul luptelor care vor avea loc, formula de mai sus dă imediat soluţia: $n + 1 = 10$, deci vor avea loc $10 \,.\, 9 : 2 = 45$ de lupte. Pentru probleme asemănătoare s-a format o ramură specială a matematicii, analiza combinatorie, care se preocupă cu determinarea numărului anumitor posibilităţi de aranjamente.

Prin renunţarea de a lucra după o schemă, problemele pot căpăta forme noi, astfel cum am văzut în cazul progre-

siilor aritmetice de gradul întîi ale lui *Gauss*, cînd în locul unei adunări obişnuite am introdus „formarea de perechi". La o privire mai atentă se recunoaşte că procedeul constă în slăbirea unor anumite premise. A fost suficient să se ştie că fiecare număr al unui şir de numere depăşeşte cu aceeaşi valoare numărul premergător, fiind cu totul fără importanţă dacă această valoare era 1 sau mai mare ori mai mică decît 1. Din această recunoaştere a rezultat o lege matematică generală. Dimpotrivă, rezolvarea problemei următoare, aceea a determinării sumelor unor numere ridicate la cub, ne dă în ultimă analiză impresia că nu este mulţumitoare. Aceasta se datoreşte faptului că procedeul geometric, pe cît pare de atrăgător, nu conduce totuşi decît la rezolvarea problemei date, soluţia neputînd fi însă extinsă. Prin urmare, progresul este real numai atunci cînd se slăbesc premisele, pentru ca acestea să poată cuprinde un număr mai mare de legi matematice. Această caracteristică se întîlneşte mereu. Să analizăm încă un exemplu foarte interesant, recreîndu-ne totodată de cifre şi formule.

GEOMETRIA CAUCIUCULUI

Pe *Leonhard Euler*, un foarte renumit şi multilateral matematician, îl preocupa odată problema posibilităţii efectuării unei anumite călătorii. Desenul din figura 39 explică această problemă. În desen se vede un rîu cu diferite poduri ; *Euler* se întreba : se poate oare alege astfel traseul încît să se treacă numai o dată peste fiecare pod, fără să se omită nici unul ?

La început stăm nelămuriţi în faţa problemei. Este vorba în realitate de rapoarte geometrice, care însă nu au nimic comun cu geometria din şcoală. Problema nu este în funcţie nici de lungimea drumului şi nici de unghiurile pe care le formează între ele podurile şi rîul. Dacă mai înainte am renunţat la procedeul schematic de adunare a unităţilor independente, de rîndul acesta schema geometrică de rezolvare nu ne este de ajutor. Am putea rezolva problema prin diferite încercări. Acest lucru însă ar fi destul de obositor, iar încercările nu ne-ar satisface, deoarece fiecare traseu nou ar însemna o problemă cu totul nouă,

care n-ar putea fi rezolvată prin încercările făcute anterior. Din această cauză, *Euler* a încercat de la început să facă un raţionament care să poată fi transpus şi la alte cazuri. Deoarece în raţionamentele lui *Euler* rapoartele geometrice sînt cu totul suprimate, în geometrie se începe formarea

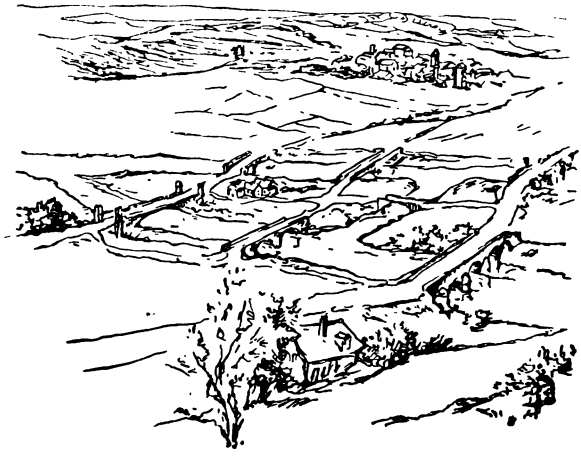


Fig. 39.

unei noi ştiinţe numită topologie. Astăzi punctele de plecare ale topologiei sînt altele decît cele ale lui *Euler*; important rămîne însă faptul că topologia s-a cristalizat prin raţionamente din domeniul geometriei la care au fost slăbite premisele obişnuite prin neîntrebuinţarea dimensiunilor sau dreptelor, a distanţelor sau unghiurilor.

Pentru a rezolva problema care îl preocupa pe *Euler*, să privim pe desen întîi ţinuturile către care duc cele trei poduri, de exemplu delta rîului din dreapta. Este evident că pentru a trece numai o dată pe fiecare din cele trei poduri, există doar două posibilităţi: sau se merge de două ori dinspre deltă şi o dată către ea, sau se merge de două ori către deltă şi o dată dinspre ea. În primul caz, călătoria trebuie pornită din deltă, neputînd fi posibilă în alt mod plecarea de două ori din deltă cu o singură reîntoarcere, în timp ce în cazul al doilea, călătoria trebuie să se ter-

mine în deltă din aceleaşi motive. Ceea ce s-a spus despre deltă este valabil pentru celelalte două ţinuturi, care au de asemenea trei poduri. Deci, în total, există trei asemenea ţinuturi în care trebuie sau să înceapă sau să se termine călătoria. În mod normal însă orice călătorie are numai un început şi numai un sfîrşit; din această cauză condiţia rămîne nerealizabilă. În acest caz nu există nici o călătorie care să treacă peste fiecare pod şi numai o singură dată.

După cum se vede, este vorba de o problemă geometrică de o categorie specială. Rezolvarea a decurs într-un cadru în care nu depindea nici de caracterul linear al figurilor şi nici de rapoartele dimensionale ale acestora. Tot ce se susţine despre o figură trebuie să rămînă just, chiar dacă suprafaţa se confecţionează dintr-o pojghiţă de cauciuc pe care se desenează figura şi apoi se deformează, după plac, cauciucul. Ştiinţa care se ocupă cu această problemă, topologia, ar putea fi numită din această cauză şi geometria cauciucului, dacă ea nu şi-ar propune şi ţeluri mai îndepărtate.

În aceste împrejurări nu ar avea nici un rost măsurarea unghiurilor, deoarece acestea ca şi lungimile arcelor curbelor se modifică atunci cînd se deformează pojghiţa de cauciuc. Totuşi se găsesc cu uşurinţă enunţări care fac parte evidentă din geometrie şi care rămîn valabile la orice deformare a pojghiţei de cauciuc. De exemplu, o linie închisă împarte în două părţi pojghiţa de cauciuc, astfel încît nu se poate ajunge dintr-o parte în cealaltă fără a trece peste linia de demarcaţie. Aceasta formează o limită între cele două părţi, care există şi rămîne orişicum am deforma pojghiţa de cauciuc; în acest caz avem de-a face cu cea mai simplă lege din geometria cauciucului.

Caracteristic pentru astfel de teoreme este faptul că ele sînt greu de demonstrat — cel puţin aceasta este impresia noastră. Cu toate că concepţia noastră s-a obişnuit din viaţa de toate zilele cu astfel de lucruri, nu ne-am antrenat atît de mult raţiunea încît să putem trage concluzii logice în mod curent, în acest domeniu. Aceasta nu este de mirare. Gradul nostru de înţelegere trebuie să urce încet pe turnul cunoştinţelor, pe care omenirea nu îl construieşte dintr-o dată, ci treptat. Cunoştinţele formează elementele constructive, pe care le luăm fie din lumea exterioară —

cum este cazul topologiei —, fie din rezultate dobîndite prin deducţii pur raţionale. Există însă marele pericol de a se repeta construcţia turnului Babel, specializarea mergînd primejdios de departe.

La congresele matematicienilor se întîmplă uneori ca participanţi de seamă din domenii diferite să vorbească despre „vreme", neputînd duce discuţii în domeniul ştiinţific pe care îl cunoaşte fiecare.

TEORIA MULŢIMILOR ŞI REZULTATELE EI PARADOXALE

Să părăsim geometria cauciucului şi să ne preocupăm de o disciplină matematică foarte modernă, aceea a mulţimilor. Prin mulţime se înţelege o reunire de lucruri diferite. Acestea pot să fie cai frumoşi sau mere mici, culori sau numere, prin urmare atît obiecte reale cît şi obiecte imaginate. Reunirea este făcută printr-o condiţie, care hotărăşte dacă obiectul face sau nu parte dintr-o mulţime.

Să considerăm numărul tuturor germanilor a căror înălţime este între 1,60 şi 1,80 m. În acest caz condiţia este clară. Metrul de măsurat hotărăşte imediat persoana care face parte din mulţimea care ne interesează. Din păcate nu ne este posibil de a restrînge totalitatea condiţiilor permise astfel încît să nu se producă niciodată dificultăţi de raţionament. Un exemplu poate să ne ilustreze aceasta: unui marinar i se ordonă să bărbierească membrii echipajului care nu se pot bărbieri singuri. Această măsură pare rezonabilă şi fără dificultăţi. În acest caz marinarul nostru trebuie să se radă şi el? Dacă se răspunde afirmativ, atunci se poate obiecta că marinarul nu se supune exact ordinului, deoarece el ar bărbieri pe cineva care se poate bărbieri singur şi anume pe el. Dacă, dimpotrivă, răspunsul este negativ, atunci marinarul acţionează iarăşi împotriva ordinului, deoarece, dacă el nu se bărbiereşte, ar trebui totuşi să o facă conform ordinului primit. Aşadar condiţia în acest caz nu e satisfăcătoare. Dilema va fi fără obiect numai dacă marinarului nu îi creşte barba.

Teoria mulţimilor mai prezintă încă şi alte surprize. Referindu-ne la *Giordano Bruno*, să presupunem că există un număr infinit de lumi ai căror locuitori se bucură toţi

de o viață spirituală similară cu a noastră, adică ei creează și literatură. Să considerăm că și creațiile lor sînt cuprinse în cărți. Ne punem acum întrebarea, cîte asemenea cărți pot să existe? Mai întîi, este de la sine înțeles că și o poezie nemuritoare poate fi scrisă cu ajutorul a circa 30 de litere împreunate sub formă de cuvinte într-un text. Să considerăm în mod larg poezii care să cuprindă pînă la 1 000 000 de cuvinte și cuvintele pînă la 50 de litere. Cît de largi sîntem în această apreciere rezultă din cartea de basme *„O mie și una de nopți"*, care spune în a 445-a noapte că coranul ar conține 79 439 de cuvinte, compuse la rîndul lor din 323 670 de litere.

Se pot calcula apoi modurile în care se pot ordona cele 30 de litere pentru formarea a 1 000 000 de cuvinte. Această problemă face parte din domeniul teoriei combinațiilor, rezultînd un număr într-adevăr foarte mare, însă totuși finit. Acest număr finit de creații literare ar trebui acum atribuit unui număr infinit de autori, deoarece noi am considerat că este vorba de un număr infinit de lumi, deci că există și un număr infinit de scriitori. Din aceasta rezultă că cel puțin una din cărți ar trebui atribuită unui număr infinit de autori. Ar putea să se întîmple ca această carte să se numească tocmai Faust și să poarte pe coperta cărții numele de *Goethe*. Ca autor, în acest caz ar fi existat un număr infinit de scriitori cu numele de *Goethe*; toți aceștia ar fi scris cuvînt cu cuvînt aceleași poezii, fără a fi plagiatori. În această problemă este mai puțin surprinzător faptul că ar exista un număr infinit de *Goethe*, decît faptul că ar fi putut să nu existe nici unul. Aceasta rezultă evident atunci cînd se consideră că există un număr foarte mare de lumi, fără ca ele să fie infinit de multe.

La aceeași concluzie se ajunge în mod obligatoriu și atunci cînd se consideră că lumea noastră ar dura veșnic. Deoarece, așa după cum am văzut, numeroasele cărți scrise ar trebui și de data aceasta să fie atribuite unui număr infinit de scriitori, aceasta ar conduce ca și mai înainte la numeroși *Goethe*. Mai de mult, această concluzie ar fi fost considerată ca o dovadă pentru durata finită a lumii noastre. Chiar dacă lumea ar dăinui un timp foarte, foarte lung, s-ar produce — conform observației de la sfîrșitul paragrafului trecut — o nouă naștere a lui *Goethe*.

Interesul indienilor pentru numerele mari ar fi găsit în aceasta un nou elan, dacă ar fi aflat că se poate admite, în locul paradoxului infinitului, un paradox al finitului.

Ce subiect plăcut pentru satirici. În adevăr, cu toate că *Swift* nu întrezărise toate acestea, el pune totuşi pe *Gulliver* să spună următoarele despre Academia din Lagado :

„Primul profesor pe care l-am văzut se găsea într-o cameră mare şi era înconjurat de 40 de elevi. După saluturile obişnuite, el observă că privesc nedumerit la un cadru care ocupa cea mai mare parte din lungimea şi lăţimea camerei. Profesorul spuse că poate eu mă mir de faptul că el se ocupă de un proiect menit să îmbunătăţească ştiinţele speculative cu ajutorul unor metode practice şi mecanice. El afirmă că, în curînd, lumea îşi va da seama de folosul acestei metode. Pe profesor îl măgulea faptul că niciodată în creierul omenesc n-a încolţit o idee mai înaltă şi mai nobilă. Oricine ştie cîtă osteneală cere oamenilor metoda obişnuită pentru studierea artelor şi ştiinţelor. Profesorul era convins că datorită născocirii sale, pînă şi persoanele cele mai inculte vor putea, cu o cheltuială şi o muncă fizică redusă, să scrie versuri sau cărţi de filozofie, de matematică şi teologie, fără să fie genii sau să aibă studii speciale. După aceasta m-a condus la cadru, unde erau aşezaţi în rînduri toţi elevii lui. Cadrul era de circa 6 m pătrate şi se găsea în mijlocul camerei. Suprafaţa cadrului era formată din bucăţele de lemn de mărimea unui zar, din care unele erau mai mari decît celelalte. Bucăţelele de lemn erau prinse unele de altele prin nişte sîrme subţiri şi erau lipite pe fiecare parte cu hîrtie. Pe fiecare hîrtie erau scrise toate cuvintele limbii ţării la diferite moduri, timpuri şi declinări, însă fără nici o ordine. Profesorul mă rugă să fiu atent, deoarece vrea să-şi pună maşina în funcţie. La comanda profesorului, fiecare elev luă în mînă cîte un mîner de fier din cele 40 care erau fixate de marginea ramei. Printr-o rotire bruscă a mînerelor, întreaga ordine a bucăţelelor de lemn se schimbă complet. După aceasta, profesorul ceru la 36 de elevi să citească rar diferitele rînduri pe măsură ce apăreau pe cadru şi atunci cînd descopereau trei sau patru cuvinte care puteau forma o frază, o dictau celorlalţi patru elevi, care o scriau imediat. Această treabă s-a repetat de trei sau patru ori. Maşina era astfel

aranjată încît la fiecare rotire a mînerelor cuvintele îşi schimbau locurile, în timp ce bucăţelele de lemn se întorceau.

Şcolarii trebuiau să-şi petreacă şase ore zilnic la această lucrare. Profesorul îmi arată mai multe pagini completate în acest mod cu fraze întrerupte, cărora el voia să le dea un înţeles. Din acest material bogat, spunea el, va da lumii o privire generală asupra tuturor artelor şi ştiinţelor. Această metodă ar putea totuşi fi îmbunătăţită, iar timpul de învăţătură scurtat dacă lumea ar aduna bani pentru confecţionarea şi punerea în funcţie în Lagado a 500 de asemenea cadre şi dacă giranţii cadrelor ar fi obligaţi să-şi unifice colecţiile lor de texte.

El îmi dădu asigurarea că s-a preocupat chiar din tinereţe de această invenţie şi a construit cadrul în aşa chip, încît acesta cuprinde întregul vocabular şi calculează exact chiar şi proporţia dintre numărul particulelor, al substantivelor, verbelor şi al altor părţi din frază, care se găsesc în cărţi".

CALCULE IN CARE INTERVINE ŞI INFINITUL

Dacă în cele arătate mai înainte era vorba de un rezultat paradoxal, surpriza următoare pe care ne-o dă infinitul este cu mult mai mare. După cum s-a spus mai sus, un oracol cerea o dată dublarea mărimii zarurilor. Dacă se încearcă să se calculeze lungimile laturilor unui zar cu un volum dublu de mare, atunci rezultă o fracţie zecimală infinită 1,259..., împărţirea neputîndu-se face niciodată exact. Oricît de departe s-a mers cu calculul zecimalelor, şirul numerelor 1, 2, 3, 5, 7 nu a apărut în această fracţie şi este îndoielnic dacă, oricît s-ar continua calculul, ar apărea vreodată. Dacă însă se alege drept condiţie a apartenenţei unei mulţimi, condiţia ca să fie cuprinse toate şi numai acele numere în care apare şirul numerelor de mai sus, nu se va şti dacă lungimea laturii noului zar va face parte din această mulţime sau nu. Condiţia ne obligă la o hotărîre pe care nu o putem însă constata.

După cele spuse există oare speranţa de a găsi reguli de calcul pentru acest infinit şiret, în scopul conturării lui din punct de vedere matematic şi a stabilirii unei aritmetici

a infinitului ? În mod surprinzător aceasta există, însă numai dacă se renunţă la ideea de a regăsi în calculele cu infinitul toate regulile de calcul din aritmetica numerelor obişnuite. Aceasta rezultă din definiţia infinitului ca număr, cînd noţiunea de număr se extinde astfel, încît se consideră nu numai mulţimi compuse dintr-un număr finit de elemente, ci şi mulţimi fără sfîrşit. Se constată deci din nou o slăbire a premisei restrictive.

Noţiunea de număr permite imediat această generalizare, dacă ne gîndim cum trebuie înţeles el în cazul obişnuit al mulţimilor formate dintr-un număr finit de elemente. Pe cît ne pare de bine înţeleasă această noţiune şi pe cît de exact credem că ştim ceea ce înseamnă un „număr de obiecte", matematicianul nu se poate declara mulţumit cu astfel de cunoştinţe comune, ci trebuie să găsească o definiţie limpede şi precisă. Aceasta se întîmplă cu ajutorul „corespondentelor biunivoce", o noţiune fundamentală pentru toată matematica modernă. În matematică, expresia „biunivocă" înseamnă o întărire a expresiei obişnuite „univoc". Pentru aceasta să dăm un exemplu : cinci cai şi cinci călăreţi reprezintă două mulţimi ; ele pot fi făcute să corespundă biunivoc una faţă de alta, prin faptul că fiecare călăreţ se poate aşeza pe unul din cai. Important este ca fiecare element dintr-o mulţime să fie împerecheat cu un element din cealaltă mulţime şi să nu rămînă nici un element stingher. Deci, nici un călăreţ nu a rămas fără cal şi nici un cal, fără călăreţ. Ne dăm seama că ambele numere de obiecte sînt egale, deoarece ambele mulţimi au putut fi făcute să corespundă biunivoc una faţă de alta. Evident că cele arătate mai sus au o valabilitate generală, astfel încît numerele de obiecte a două mulţimi sînt egale numai atunci cînd între cele două mulţimi se poate crea o corespondenţă biunivocă.

Dacă o mulţime conţine mai multe elemente decît cealaltă mulţime, de exemplu dacă sînt şase călăreţi şi numai cinci cai, atunci un călăreţ rămîne fără cal. Şi acum se mai pot face să corespundă caii univoc faţă de călăreţi, nici un cal nerămînînd fără stăpîn, însă această corespondenţă nu se poate inversa. După cum am spus, un călăreţ rămîne fără cal sau doi călăreţi trebuie să se mulţumească cu acelaşi cal. Corespondenţa este univocă fără să fie bi-

univocă, adică nu mai este univoc reversibilă; astfel se justifică introducerea acestei expresii, chiar dacă alegerea ei nu este prea fericită. Se poate însă ca din ambele mulţimi, una din ele — de exemplu mulţimea de cai — să corespundă biunivoc la o submulţime întreagă (nefracţionară) din cealaltă mulţime, adică la cinci din cei şase călăreţi. Evident că aceasta este din nou valabil pentru oricare număr finit de obiecte, astfel că putem spune: după cum din două mulţimi finite, prima poate să corespundă biunivoc faţă de a doua sau numai faţă de o submulţime întreagă a celei de-a doua mulţimi, numerele de obiecte corespunzătoare sînt egale sau primul număr este mai mic decît al doilea. În rezumat, două mulţimi finite se pot compara întotdeauna între ele prin numerele de obiecte pe care le reprezintă.

Cît de departe se poate generaliza aceasta şi aplica mulţimilor infinite? În cazul lor, nu se mai poate vorbi despre numere de obiecte, noţiunea corespunzătoare a unei mulţimi infinite numindu-se „putere". Din păcate, de data aceasta nu se mai poate susţine de la început că două mulţimi infinite se pot compara întotdeauna între ele prin puterile lor. În acest caz nu mai este valabil principiul din cazul mulţimilor finite, prin care o mulţime poate să corespundă biunivoc fie cu cealaltă mulţime, fie cu o submulţime întreagă a acestei mulţimi. Observîndu-se mai atent, se recunoaşte că această corespondenţă se bazează pe posibilitatea de a ordona elementele mulţimilor finite într-un şir. Dacă apoi se şterg elementele de la începutul şirului, cantitatea rămasă posedă din nou un prim element. Corespondenţa biunivocă se face prin aceea că în ambele mulţimi se şterge mai întîi primul element, considerîndu-l ca împerecheat, apoi se şterge cel de-al doilea element şi aşa mai departe, pînă ce una din mulţimi se termină sau ambele mulţimi se epuizează concomitent. În consecinţă, este de aşteptat ca şi mulţimile finite să poată fi comparate numai după ce vor fi „bine ordonate". Pentru ordonare este suficientă ipoteza că un element ales din fiecare submulţime este asemănător cu primul element din submulţimea rest din cazul mulţimilor finite. Această presupunere formează o nouă teoremă, ea permiţînd o ordonare printr-un raţionament precis asupra căruia nu vom

stării aci. Se precizează numai că la început majoritatea matematicienilor au înţeles complet greşit prima demonstraţie.

Cel mai simplu exemplu de mulţime infinită pe care ne-o putem imagina o formează numerele naturale, adică 1, 2, 3, 4, 5 ..., care formează un şir. Puterea acestei mulţimi reprezintă cea mai mică mulţime infinită. Aceasta, deoarece din fiecare mulţime infinită se poate lua un şir de elemente, după care, dacă mai rămîn totuşi elemente, mulţimea ar fi „mai mare" decît şirul simplu. Poate însă că tocmai această putere a şirului să fie singurul infinit cu care sînt egali toţi ceilalţi infiniţi? Răspunsul trebuie să fie negativ, deoarece se poate arăta că mulţimea tuturor numerelor reale — cuprinzînd toate numerele raţionale şi iraţionale — posedă o putere superioară. Pînă astăzi nu s-a putut rezolva întrebarea dacă între aceste două puteri mai există încă şi altele; „această întrebare formează mult discutata „problemă a continuului".

Ca o dovadă a afirmaţiei noastre, să considerăm mai întîi că mulţimea tuturor numerelor ar fi numărabilă, adică formează un şir. Să ne închipuim acum scoaterea de zecimale a fiecărui număr continuată pînă la infinit. Aceasta este posibilă numai dacă se exclud şirurile de cifre care conţin numărul 9. În acest caz, la numerele întregi se vor găsi după virgulă numai zerouri. La fracţiile ordinare, cifrele se supun unor reguli uşor de stabilit, de exemplu $1/2 = 0{,}500\ldots$, $1/3 = 0{,}333\ldots$ Toate celelalte fracţii zecimale, a căror lege de formare nu se poate stabili, completează domeniul numerelor reale.

Să considerăm şirul acestor fracţii zecimale şi să formăm un nou număr în modul următor: se alege o cifră, care este diferită de prima cifră după virgulă a primului element, după care se alege o a doua cifră, diferită de a doua cifră după virgulă a celui de-al doilea element şi aşa mai departe. Se obţine astfel un şir de cifre, care citit ca fracţie zecimală se deosebeşte de fiecare element al şirului. De exemplu, deosebirea faţă de primul element este la primul loc după virgulă etc. Deoarece numărul astfel format nu se găseşte între elementele şirului, însă reprezintă, fără îndoială, un număr real, rezultă că şirul nu cuprinde încă toate numerele reale. La numărare mai rămîn încă elemente disponibile.

De aci rezultă că puterea mulțimii tuturor numerelor reale este mai mare decît puterea celei mai mici mulțimi infinite, ceea ce era de demonstrat. Dacă se scriu unele sub altele elementele succesive ale șirului și cifrele care trebuie modificate se unesc printr-o dreaptă, aceasta va fi o diagonală. Din această cauză, demonstrația de mai sus este numită metoda diagonalei.

Se poate merge încă mai departe și se poate găsi pentru fiecare putere a unei mulțimi oarecare M o altă putere, care este și mai mare. Pentru aceasta este suficient să formăm mulțimea m a tuturor submulțimilor mulțimii date M. Trebuie mai întîi observat că M poate fi reprezentat biunivoc față de o submulțime proprie a lui m, dacă fiecare element m din mulțimea M se împerechează cu un element din mulțimea m, care este tocmai submulțimea proprie compusă dintr-un singur element m. La această împerechere pot rămîne elemente libere din mulțimea m, de exemplu submulțimi compuse din două elemente ale lui M. S-ar putea însă ca M să fie totuși reprezentat biunivoc față de mulțimea totală m printr-o altă împerechere? Vom arăta că aceasta nu este posibil. Dacă există o împerechere oarecare, atunci acele elemente m pot fi cuprinse într-o mulțime N, căreia îi corespund submulțimi care nu conțin elementele m. Putem afirma în acest caz că N nu conține nici un element, deoarece în caz contrar N ar trebui să conțină elementul m corespunzător, ceea ce contrazice definiției lui N, sau să nu conțină elementul m corespunzător, contrar condiției de formare a lui N, după care m ar trebui să fie cuprins în N.

În modul acesta, mulțimea tuturor submulțimilor, care la început apărea inofensivă, se dovedește a fi o noțiune plină de contradicții, deoarece, conform definiției, trebuia să cuprindă mulțimea tuturor submulțimilor. După cum am văzut însă mai sus, acestea ar trebui să conțină în mod paradoxal o putere superioară celei a mulțimii în care sînt cuprinse.

Noțiunile de egalitate și inegalitate la mulțimile infinite reclamă anumite cercetări, care provoacă uneori noi surprize. Să pornim de la mulțimea primelor 100 de numere. Dintre acestea, 50 sînt numere pare, deci exact jumătate din ele. La primele 1000 de numere vor fi din nou jumătate

numere pare. Ar fi totuşi greşit dacă ne-am aştepta la acelaşi lucru în cazul şirului infinit 1, 2, 3, 4 ... Mulţimea tuturor numerelor pare este, dimpotrivă, de aceeaşi putere cu aceea a întregului şir, cu toate că această mulţime formează numai o submulţime din şir. Aceasta, deoarece numerele pare pot forma un şir în ordinea mărimii lor, două şiruri permiţînd întotdeauna o împerechere printr-o corespondenţă reciprocă a elementelor lor egal depărtate. Aşadar, şirul tuturor numerelor întregi şi şirul numerelor pare au aceeaşi putere. Prin aceasta dispare convingerea că totul este mai mare decît partea, sau pe latineşte, „totum parte maius".

După ce s-a stabilit că există o infinitate de puteri, trebuie să se formuleze reguli de calcul pentru acestea. Pentru a ne putea face o idee despre particularităţile aritmeticii infinitului, se dau mai jos cîteva exemple. Mai întîi să explicăm ce este o sumă. Dacă două mulţimi finite nu au un element comun, se unesc elementele lor într-o nouă mulţime care se numeşte sumă, deoarece numărul corespunzător din sumă reprezintă suma numerelor din cele două mulţimi. Dacă avem deci o mulţime de 5 oi albe şi o a doua mulţime de 7 oi negre, atunci mulţimea acestor oi formează suma lor, pentru al cărei număr rezultă cifra 12. Aceasta poate fi transpusă direct în mulţimi infinite, observîndu-se imediat că nu are nici o importanţă ordinea termenilor sumei.

Deosebirea de bază dintre aritmetica obişnuită şi aritmetica mulţimilor infinite apare chiar la această simplă operaţie de calcul. Pentru numere de obiecte este întotdeauna valabil principiul

$$a + b \neq a \ (a \text{ plus } b \text{ este diferit de } a),$$

în timp ce puterea unei mulţimi infinite nu se schimbă dacă la aceasta se adună un şir. Ne amintim de faptul că din orice mulţime infinită M a cărei putere este a se poate întotdeauna extrage un şir f, astfel încît să se poată scrie:

$$a = b + f,$$

dacă notăm cu b puterea submulţimii rest, după ce am scos şirul f. Astfel se obţine

$$a + f = (b + f) + f = b + (f + f).$$

Dacă ne închipuim acum că în paranteza din dreapta primul şir se compune din numere pare şi al doilea şir din numere impare, atunci ne dăm seama că prin unirea celor două şiruri rezultă tocmai şirul tuturor numerelor naturale. Aceasta înseamnă că

$$f + f = f$$

şi deci este valabil :

$$b + (f + f) = b + f.$$

Însă conform primei ecuaţii, $b + f = a$, adică obţinem

$$a + f = a,$$

astfel că egalitatea susţinută de noi este dovedită ; deci prin adunarea unui şir nu se schimbă puterea unei mulţimi infinite.

Teoria mulţimilor formează o disciplină matematică care nu presupune cunoştinţe speciale. Luate în mod strict, chiar numerele naturale formează un obiect al teoriei mulţimilor şi ar trebui introduse în cadrul acesteia. Pentru aceasta teoria mulţimilor cere cîteodată eforturi serioase pentru a gîndi abstract. După părerea noastră, aceste eforturi sînt trecătoare, căci după exerciţii mai îndelungate cu raţionamentele teoretice asupra mulţimilor, ele fac loc unei facultăţi intuitive crescînde.

Am cunoscut dificultăţi de raţionament care apar în cadrul teoriei mulţimilor. Aceste dificultăţi nu trebuie să fie un argument împotriva acestei teorii, ci mai curînd trebuie considerate ca un imbold de a îngrădi metoda de lucru folosită la mulţimile finite, încît să nu mai fie posibilă apariţia unor astfel de dificultăţi. Asupra acestei probleme s-a scris mult, însă dificultăţile nu sînt încă rezolvate. Cu ajutorul teoriei mulţimilor finite se recunoaşte totuşi existenţa unor posibilităţi abstracte, la care înainte nici măcar cei mai mari savanţi nu se gîndeau şi care ne arată cît de departe putem merge cu gîndirea pe baza reprezentărilor însuşite. Chiar numai aceasta ne aduce servicii de neapreciat.

În teoria mulţimilor se recunoaşte de asemenea, o aritmetică ce trebuie să renunţe la mult din ceea ce în domeniul numerelor obişnuite este socotit ca de la sine înţeles : în domeniul numerelor naturale, egalitatea dintre o sumă şi unul din termenii sumei ar fi de neconceput, în timp ce

aceasta poate avea loc în cazul puterilor. Numărul exemplelor poate fi mărit uşor, dar nu dorim să facem o expunere completă, cele arătate constituind numai o incursiune în arsenalul în care se făuresc cele mai noi şi mai puternice arme ale spiritului omenesc.

Pot exista surprize peste surprize, ca, spre exemplu, paradoxuri, adică enunţări care pot fi afirmate sau negate cu aceeaşi justeţe, asemănătoare cu aceea a marinarului care nu ştie dacă trebuie sau nu să se bărbierească sau cu aceea a mulţimii tuturor submulţimilor. Principiul, socotit ca de la sine înţeles, că un întreg este mai mare decît o parte apare în teoria mulţimilor ca nevalabil, deoarece două mulţimi de puteri egale pot foarte bine să fie una faţă de cealaltă într-un raport ca şi întregul faţă de o parte din întreg. O altă surpriză este aceea că nu trebuie susţinută ideea că două mulţimi oarecare pot fi întotdeauna comparabile între ele. Numai dacă ele sînt bine ordonate, puterile lor sînt cu siguranţă comparabile. Din toate acestea rezultă că teoria mulţimilor s-a condus într-adevăr mereu după numerele naturale, însă prin slăbirea premiselor au rezultat concluzii uneori cu caracter foarte deosebit, care formează o teorie în adevăr nouă.

UN TÎNĂR DE 17 ANI, CREATORUL ALGEBREI MODERNE

Dacă teoria mulţimilor reprezintă unul din cele mai noi domenii speciale ale matematicii, algebra însă — de care ne vom ocupa în cele ce urmează şi care, de asemenea, s-a dezvoltat din aritmetică — se bucură de o vîrstă foarte respectabilă. Primele începuturi s-au făcut cu mii de ani în urmă; chiar însuşi cuvîntul „algebră", de origine arabă, era utilizat încă de la începutul evului mediu.

După cum ne amintim, cu mai multă sau mai puţină plăcere, din timpul şcolii, algebra se ocupă mai întîi cu rezolvarea ecuaţiilor, deci cu expresii de forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sau de forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Coeficienţii a, b, c, d pentru care am ales o denumire literală, erau imaginaţi la început ca cifre şi se căuta să se determine

pentru x valori care să satisfacă ecuaţia; aceste valori se numesc rădăcinile ecuaţiei. Astfel, ecuaţia de gradul doi

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

are două rădăcini $x_1 = 2$ şi $x_2 = \frac{1}{2}$, fapt de care ne putem convinge imediat dacă introducem valorile lui x în ecuaţie. Desigur că matematicienii nu se declară mulţumiţi de a găsi rădăcinile ecuaţiei prin încercări, deoarece încercarea, oricît succes ar avea, nu conduce niciodată la o dobîndire de noi cunoştinţe. Acela care se ocupă cu algebra încearcă mai curînd să descopere legile generale care satisfac ecuaţiile şi rădăcinile lor. El va căuta formule care să permită calcularea directă a rădăcinilor ecuaţiei, din coeficienţi. Pentru ecuaţia de gradul al doilea, aceste formule sînt relativ simple şi anume:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ şi } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

În aceste formule sînt concentrate, oarecum, toate ecuaţiile de gradul doi. Pentru a obţine imediat rădăcinile ecuaţiei este suficient să introducem în formulă valorile respective pentru a, b şi c. Există o singură restricţie şi anume : se pot ivi foarte uşor cazuri în care formula rădăcinilor să nu ducă la nici o valoare reală. Astfel ecuaţia :

$$x^2 + 1 = 0$$

nu are nici o rădăcină reală. În evul mediu, această problemă era declarată complet „imposibilă". Astăzi, matematicianul modern este mai precaut în utilizarea cuvîntului „imposibil".

Noi am văzut deseori cum prin slăbirea unor premise se ajunge la noţiuni noi. Acest lucru se întîmplă şi în cazul de faţă. Pentru a rezolva o ecuaţie „imposibilă" se extinde cantitatea numerelor reale prin introducerea „numărului imaginar", $i = \sqrt{-1}$, la mulţimea numerelor complexe. Numerele complexe reprezintă o generalizare a noţiunii de număr într-un domeniu vast, în care numerele reale reprezintă un caz special. Iniţial, numerele complexe au fost introduse pentru rezolvarea unor probleme speciale. În anul 1545, primul care le-a luat în consideraţie şi a calculat, ca rădăcini ale ecuaţiei de gradul doi $x^2 - 10x + 40 = 0$, numerele $5 + \sqrt{-30}$ şi $5 - \sqrt{-30}$ a fost *Cardano*, de

profesiune doctor, filozof şi matematician. El le considera însă „sofiste", menţionînd că : „Cu cît este mai mare subtilitatea aritmeticii, cu atît mărimea acestei subtilităţi o face să nu mai fie de nici un folos". Chiar şi *Leibniz* a considerat, în anul 1702, numerele complexe ca „un eşec al gîndirii". Au trebuit să treacă mai multe sute de ani pînă ce, în anul 1867, *Hankel* a recunoscut ca îndrumător „principiul hodegetic al permanenţei", care spune că pentru calculele algebrice este indiferent dacă acestea se fac cu numere reale sau complexe şi dacă operaţia este posibilă cu numere întregi sau cu numere raţionale. Între timp, după ce în anul 1746 *d'Alembert* şi *Euler* au arătat folosul numerelor complexe, s-a recurs la ele mai întîi cu ezitare şi apoi ori de cîte ori a fost necesar. Totuşi ele au rămas mai mult tolerate decît recunoscute, pînă ce în sfîrşit *Gauss* a reuşit, în anul 1799, să dovedească în lucrarea sa de doctorat că numerele complexe sînt indispensabile, fără însă să se preocupe îndeaproape de ele. În domeniul geometriei a început să se discute despre numerele complexe cu doi ani mai înainte, în cadrul unei comunicări făcute de *Wessel* la Academia de ştiinţe din Danemarca. Mai tîrziu, în anul 1847, *Cauchy* a pornit pe drumul care corespunde spiritului algebrei moderne, cu care ne vom ocupa în cele ce urmează.

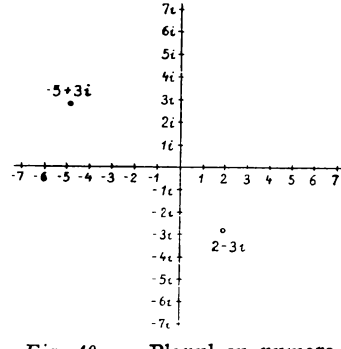


Fig. 40. — Planul cu numere al lui Gauss

Algebra modernă s-a abstractizat din nou, prin faptul că nu mai porneşte de la numere, ci de la mărimi mai generale care iau naştere numai în cazul în care se păstrează anumite proprietăţi ale numerelor, celelalte proprietăţi neglijîndu-se. Prin aceasta se ajunge la o teorie generală, în care algebra obişnuită apare ca un caz particular. La început trebuie să ne familiarizăm cu o noţiune matematică de bază şi anume cu „grupul". Printr-un grup se înţelege o mulţime anumită de elemente — finită sau infinită — care satisface anumite relaţii. Formulările apar la început oarecum abstracte, dar

ne putem familiariza repede cu ele dacă ni le reprezentăm cu ajutorul unor exemple simple.

Între elementele $a, b, c \ldots$ ale unui grup există o anumită condiție de compunere. Dacă, de exemplu, se compun două elemente oarecare a și b din grup după această condiție, atunci rezultă un element nou care se notează cu ab și care, conform condiției, trebuie să facă parte tot din grup. Pentru această compunere se cere, de asemenea, valabilitatea legii asociative : aceasta trebuie exprimată într-o formă ușor de înțeles și anume

$$(a\ b)\ c = a\ (b\ c).$$

Grupul mai trebuie să conțină un element anumit e, cu care dacă se compune oricare element a, acesta să se transforme în el însuși. Trebuie deci să existe relația :

$$e\ a = a;$$

e se numește elementul unitate stîng al grupului. În sfîrșit, se mai cere în plus ca pentru fiecare element a să existe în grup un alt element a^{-1}, astfel ca să fie valabilă relația :

$$a^{-1}\ a = e;$$

a^{-1} se numește elementul reciproc stîng al lui a. Dacă în afară de aceasta relația

$$a\ b = b\ a$$

este valabilă pentru două elemente oarecare a și b din grup, atunci legea de comutativitate este perfect valabilă și avem de-a face cu un grup comutativ numit și grupul lui *Abel* (după numele matematicianului norvegian *Abel*, mort foarte tînăr). Această condiție înseamnă evident o particularizare. Cele de mai sus pot fi ușor înțelese cu ajutorul unui exemplu curent.

Să alegem ca grup de care să ne ocupăm toate fracțiile, cu excepția lui zero, și ca lege de compunere, înmulțirea obișnuită. Să luăm, de pildă $a = \frac{2}{7}$, $b = \frac{3}{5}$; rezultă că

$$a\ b = \frac{2\ 3}{7.5} = \frac{6}{35}$$

Evident că această expresie este şi ea o fracţie, deci aparţine în adevăr grupului. Elementul unitate al grupului este

$$e = 1$$

Deci dacă a reprezintă o fracţie oarecare, de exemplu $\frac{4}{17}$, atunci $1 . \frac{4}{17} = \frac{4}{17}$, întrucît din înmulţirea oricărui element cu 1 rezultă tot acelaşi element. Cifra 1, ca orice număr întreg, poate fi privită ca o fracţie, căci $1 = \frac{1}{1}$, $19 = \frac{19}{1}$. Căutînd în sfîrşit elementul reciproc, acesta este uşor de găsit. Conform definiţiei, trebuie să fie $a^{-1}\ a = 1$, deci

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

şi în exemplul nostru, elementul reciporc al lui $\frac{2}{7}$ va fi $1 : \frac{2}{7} = \frac{7}{2}$; aşadar elementul reciproc se formează prin permutarea între ei a număratorului şi numitorului unui element.

Fracţiile pot fi cuprinse într-un grup şi în alt mod, şi anume prin includerea cifrei zero în grup, utilizîndu-se ca lege de compunere, adunarea. În acest caz, prin expresia $a\ b$ se înţelege suma a două elemente $a+b$. În acest caz, elementul unitar

$$e = 0,$$

deoarece

$$e\ a = e + a = 0 + a = a,$$

iar elementul reciproc se formează prin schimbarea semnului :

$$a^{-1} = -a$$

deoarece

$$-a + a = 0 = e.$$

Evident că şi în acest caz condiţia de grup este îndeplinită.

Noţiunea de grup depăşeşte noţiunea de mulţime prin aceea că legea de compunere stabileşte o legătură între elemente, în timp ce în cazul mulţimilor, elementele pot sta alături fără a fi legate în vreo relaţie. Există deosebiri şi din alte puncte de vedere. Dacă în cazul mulţimilor s-au

căutat întotdeauna corespondenţe biunivoce, acesta fiind unicul mijloc care să permită compararea între ele a două mulţimi în baza puterii lor, acum se renunţă la această condiţie, punîndu-se în schimb o altă condiţie, şi anume aceea ca corespondenţa să păstreze legea care leagă între ele elementele grupului. Prin aceasta se înţelege următorul lucru : dacă $a, b, c \ldots$ sînt elementele unui grup, iar $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ elementele unui al doilea grup şi dacă se face corespondenţa între a şi α şi între b şi β, atunci trebuie ca şi elementul $a\ b$ să corespundă întotdeauna cu $\alpha\ \beta$. Dacă corespondenţa satisface această condiţie, atunci ea se numeşte omomorfă, adică „de aceeaşi formă", ambele grupuri indicînd o structură înrudită. Corespondenţa se aseamănă unui binoclu prin care, dacă priveşti prin celălalt capăt, se micşorează imaginea.

Acum nu mai este necesar ca elementele ambelor grupuri să se poată împerechea sau ca fiecărui element al unui grup să-i corespundă numai un element din grupul al doilea ; dimpotrivă, într-o corespondenţă omomorfă se obţine posibilitatea importantă de a reduce un grup infinit la un grup finit. Exemplul care urmează va explica acest lucru. Să considerăm grupul tuturor numerelor întregi şi în cadrul acestuia să ordonăm anumite elemente în clase, după cum urmează : Se alege un număr dat m şi se consideră ca făcînd parte din aceeaşi clasă toate numerele care prin împărţirea cu m dau acelaşi rest (număr întreg). Dacă alegem $m = 5$, atunci rezultă cinci clase :

0, 5, 10, 15, ... (rest 0)
1, 6, 11, 16, ... (rest 1)
2, 7, 12, 17, ... (rest 2)
3, 8, 13, 18, ... (rest 3)
4, 9, 14, 19, ... (rest 4).

Toate numerele dintr-o clasă se ordonează conform corespondenţei omomorfe, în baza restului rămas de la împărţire : numerele 0, 5, 10,... corespund toate elementului 0 ; numerele 1, 6, 11, ... corespund elementului 1, ş. a. m. d. În acest caz este evident că nu se poate vorbi despre o corespondenţă biunivocă, deoarece o infinitate de numere ale fiecărei clase au corespondenţă cu un singur număr, acela al restului împărţirii. Trebuie să se mai cerceteze dacă există într-adevăr omomorfie, deci dacă elementul $a\ b$ este într-adevăr în corespondenţa biunivocă cu elementul $\alpha\ \beta$.

Să alegem două numere oarecare, de exemplu 6 şi 13, care prin adunare dau cifra 19. În corespondenţa noastră, cifra 6 corespunde restului 1, iar cifra 13, restului 3 ; dacă le adunăm, rezultă cifra 4 şi într-adevăr 19 corespunde restului 4, deci condiţia impusă este îndeplinită. În teoria numerelor astfel de metode joacă un rol important. Se poate merge mai departe şi în loc să se considere o singură lege de compunere, se pot considera mai multe. Se ajunge astfel la formări de noţiuni care pot clarifica complet, retroactiv, probleme din algebra clasică.

O mulţime între ale cărei elemente există două legi de legătură care stau una faţă de alta ca adunarea faţă de înmulţire se numeşte inel. Dacă în plus este întotdeauna posibilă şi o împărţire, atunci avem de-a face cu un corp. Aceste noţiuni de inel şi de corp au în cazul de faţă un înţeles mai restrîns, fără însă a micşora generalitatea. De exemplu, mulţimea tuturor numerelor întregi, avînd ca legi de legătură adunarea şi înmulţirea obişnuită, formează un inel, nu însă şi un corp. Pentru a ajunge la un corp, inelul tuturor numerelor întregi trebuie mai întîi extins prin adăugarea tuturor fracţiilor. Cele arătate mai sus constituie un exemplu de felul cum trebuie să se procedeze în cazul unui inel oarecare.

Din nou trebuie să se cerceteze cum transformă o corespondenţă un inel care păstrează în acelaşi timp ambele legi de compunere şi care face să-i corespundă lui $a + b$, $\alpha + \beta$ şi lui ab, $\alpha\beta$. Astfel de corespondenţe se numesc toate omomorfe, ajungîndu-se, ca şi în cazul grupurilor, la elemente grupate în clase. Într-un grup, clasa care conţine elementul unitate se numeşte divizor normal ; în mod corespunzător, clasa de elemente dintr-un inel care cuprinde pe zero (cu alte cuvinte elementul unitate al adunării) se numeşte ideal. Divizorul normal şi idealul pot să servească la introducerea omomorfiei, fapt care le asigură un rol predominant.

Un ideal poate fi considerat ca un număr căruia i se poate dezvolta teoria divizibilităţii la fel ca şi pentru un număr obişnuit. În cadrul acestei teorii este valabilă în special o descompunere în ideale speciale, acestea fiind cele mai simple elemente constitutive pentru fiecare ideal. Prin aceasta s-a reuşit transpunerea unei legi fundamentale din

teoria numerelor şi anume că fiecare număr natural poate fi scris numai într-un singur mod ca produs de factori primi, de exemplu 6 ca 2 . 3 sau 63 ca 3 . 3 . 7. Toate aceste noţiuni abstracte pot fi urmărite foarte bine prin două exemple simple. Un exemplu îl formează inelul numerelor întregi, iar cel de-al doilea, mulţimea tuturor expresiilor de forma :

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

unde n este arbitrar, iar coeficienţii aparţin unui corp. Teoremele la care conduce în ambele cazuri teoria divizibilităţii idealelor erau cunoscute dinainte, întocmai ca şi algebra modernă, care s-a născut din observaţia că sub forme diferite sînt ascunse aceleaşi concluzii şi că au putut fi scoase în evidenţă legăturile adînci, comune.

Cum se poate trata problema iniţială de a rezolva, în cadrul algebrei moderne, ecuaţii de tipul următor?

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

La început, s-a sperat ca rădăcinile să se poată extrage întotdeauna ca expresii algebrice din coeficienţi, după cum se putuse în cazul ecuaţiilor pînă la gradul patru. Această speranţă a dispărut în mod treptat în urma încercărilor rămase fără succes şi în sfîrşit, la începutul secolului al XIX-lea, s-a ajuns la convingerea că ecuaţiile de gradul cinci şi mai mare nu pot fi rezolvate algebric. Cu toate că o ecuaţie de forma

$$x^5 - 1 = 0$$

poate fi rezolvată algebric sub forma

$$x = \sqrt[5]{1},$$

totuşi o ecuaţie oarecare de gradul cinci nu mai poate fi rezolvată. Dovada acestei afirmaţii se bazează pe cercetări care, conform noţiunilor cîştigate, se pot ataca în modul arătat mai jos. Menţionăm însă că drumul istoric urmat deviază aparent mult de drumul urmat de noi. Ulterior însă lucrările originale s-au dezvoltat de la sine în sensul vederilor noastre, aducînd prin aceasta dovada pentru legitimitatea algebrei moderne.

Se porneşte de la un corp şi se extinde aceasta prin adăugarea rădăcinii unei ecuaţii a căror coeficienţi provin

din corpul dat. Prin această metodă se ajunge, pornind de la numere reale, la numere complexe, corpului format din numere reale adăugîndu-i-se rădăcina i a ecuației $x^2 + 1 = 0$, deci $i = \sqrt{-1}$. Acum trebuie ca noua mărime, rădăcina care îi corespunde lui i, să fie subordonată celor două legi de compunere pentru elementele corpului, ceea ce se realizează cu ajutorul unor ideale. Cu alte cuvinte este vorba, așadar, mai întîi de a crea noua mărime și apoi de introducerea ei în corpul care o cuprinde.

Pasul hotărîtor pretinde înglobarea tuturor rădăcinilor ecuației. În corpul cel mai mic se consideră corespondențe bi univoce care transformă corpul în el însuși și care lasă neschimbate legile de adunare și înmulțire și în special coeficienții ecuației. Dacă se consideră ca lege de compunere efectuarea consecutivă a două astfel de corespondențe, atunci acestea formează un grup.

Aceasta constituie cheia care dă răspunsul principial la întrebarea care ecuații sînt rezolvabile numai pe cale algebrică, întrebare care întrece cu mult începutul dezvoltărilor noastre algebrice. Fiecărei ecuații îi corespunde un grup format din corespondențele descrise mai înainte, structura acestui grup hotărînd dacă ecuația este sau nu rezolvabilă prin metode algebrice. Prin aceasta se vede că teoria grupurilor domină teoria ecuațiilor, despre care nu se știe astăzi mai mult decît știa fondatorul ei, *Évariste Galois*, în vîrstă de 17 ani, care patru ani mai tîrziu, în 1832, a fost ucis în duel.

Puținele și scurtele publicații ale lui *Galois* se numără astăzi printre lecturile matematice cele mai dificile. Academia franceză i-a respins pe vremuri lui Galois mai multe comunicări, cu motivarea că sensul acestora ar fi nebulos și aproape de neînțeles „din cauza dorinței exagerate de a se exprima prea concis". Astăzi însă părerile sînt altele. Astfel, într-un manual de specialitate foarte răspîndit, se spune că *Galois* stăpînea reprezentarea raționamentelor sale „cu o minunată claritate și precizie". Față de aprecieri atît de diferite, este important să se vadă ce rol joacă timpul nu numai la apariția unor opere capitale, ci și la aprecierea creațiilor intelectuale. Dacă un inovator — fie în muzică, fie în știință — întrece cu mult cunoștințele timpului

său, atunci poate uşor să i se întîmple să nu fie înţeles şi din acest motiv ideile lui să fie respinse. Dacă reuşeşte, ca în cazul lui *Richard Wagner*, ca opera lui să supravieţuiască, atunci are noroc. Dacă însă nu reuşeşte, atunci i se întîmplă la fel ca lui *Galois*. Dacă astăzi o întreagă disciplină algebrică, care de altfel încă nici acum nu este prea cunoscută pe cît ar merita, poartă numele de „teoria lui *Galois*", aceasta este o slabă consolare.

Formarea noţiunilor abstracte în algebra modernă se explică prin faptul că aceste noţiuni permit diferite interpretări, realizînd prin aceasta o economie în gîndire. Este suficient ca un raţionament să fie efectuat o singură dată „in abstracto", pentru ca după aceea, prin diferite interpretări, el să genereze o multitudine de teoreme, care, direct, ar fi foarte greu de dovedit. Toate acestea se obţin iarăşi prin slăbirea premiselor, care în cazul de faţă au condus la noţiunile de grup şi ideal, noţiuni indispensabile în mecanica cuantelor.[1]

GEOMETRIA ÎN CIFRE

Unele rezultate din algebră pot fi explicate pe cale geometrică. Acest lucru se petrece în geometria analitică, creată de un francez, ofiţerul, filozoful şi matematicianul *René Descartes*. Geometria analitică face să corespundă unor forme geometrice, ca puncte, linii, suprafeţe, forme aritmetice şi pune astfel în evidenţă o concordanţă a mo-

[1]Apărută în legătură cu teoria lui Galois, teoria grupurilor s-a dezvoltat, într-o primă perioadă, ca teoria grupurilor finite de permutări. Curînd s-a observat că permutările folosite pentru construirea grupurilor nu sînt esenţiale. Astfel s-a ajuns la crearea teoriei generale a grupurilor finite.

La sfîrşitul veacului trecut şi începutul veacului nostru, s-au obţinut rezultate fundamentale în teoria grupurilor finite şi s-au creat metode noi mai ales prin contribuţia lui G. Frobenius. O. Hölder, W. Burnside, I. Schur şi Miller.

Trecerea la teoria grupurilor „infinite" (adică nu neapărat finite) s-a făcut prin lucrarea fundamentală a întemeietorului şcolii sovietice de teorie a grupurilor, O. I. Smidt, în cartea „Teoria abstractă a grupurilor" (Kiev, 1916). Ulterior, această ramură a matematicii de importanţă esenţială pentru fizică a fost îmbogăţită de cercetătorii sovietici S. N. Cernikov, A. I. Malţev, A. G. Kuroş, I. L. Kulkov, L. S. Pontriaghin care au creat ramuri noi şi au demonstrat teoreme de largă aplicaţie (*N. R.*).

dului de comportare a celor două categorii. Această corespondență se poate face prin aceea că se aleg trei drepte perpendiculare între ele, numite axe de coordonate, considerînd distanțele unui punct în raport cu planurile care trec prin aceste axe de coordonate (fig. 41). În acest mod

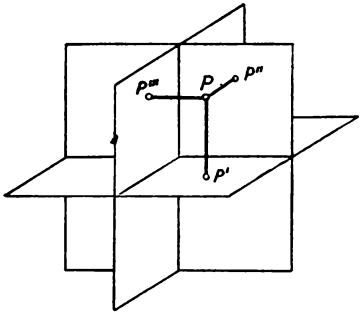


Fig. 41.

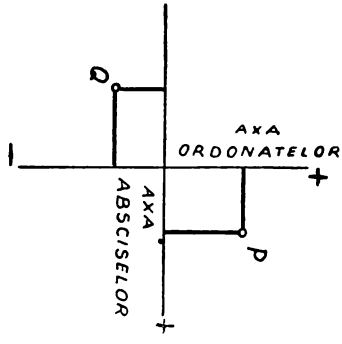


Fig. 42. — 1 — Axa absciselor; 2 — Axa ordonatelor

fiecărui punct îi corespund trei cifre, adică cele trei valori ale coordonatelor. În mod invers, fiecărui triplet de valori îi corespunde un singur punct. Dacă ne mărginim la un

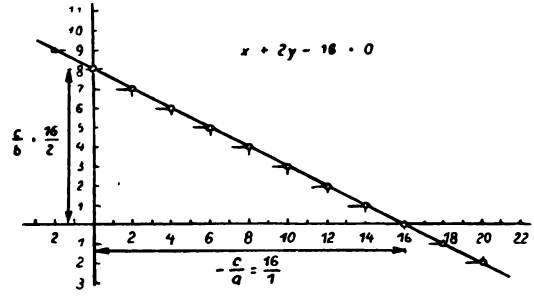


Fig. 43.

plan, atunci pentru determinarea unui punct sînt suficiente două drepte perpendiculare între ele (fig. 42). Prima dintre aceste două axe de coordonate se numește axa absciselor, iar a doua poartă numele de axa ordonatelor ; în mod corespunzător, distanțele se numesc abscisă și ordonată.

Dacă se consideră o dreaptă într-un plan, atunci apare normală întrebarea asupra relațiilor care există între coordonatele fiecărui punct de pe această dreaptă. Dacă se înseamnă abscisa cu litera x și ordonata cu litera y, atunci se constată că coordonatele tuturor punctelor de pe o dreaptă satisfac ecuația $ax + by + c = 0$ (fig. 43). Toate soluțiile posibile ale acestei ecuații reprezintă coordonatele punctelor situate pe dreaptă. Coeficienții din ecuație determină poziția dreptei în raport cu axele de coordonate.

Un principiu din algebră spune că două ecuații de forma $ax + by + c = 0$ și $dx + ey + f = 0$ sau nu au nici o soluție comună, sau posedă numai o pereche comună de valori x, y, sau, în sfîrșit, toate perechile de valori care formează soluțiile uneia din ecuații satisface în același timp și cealaltă ecuație. Acest principiu algebric poate fi transpus imediat și în geometrie. În geometrie două drepte pot, conform acestei legi, să fie sau paralele, sau să se întîlnească între ele într-un singur punct, sau, în sfîrșit, să coincidă.

În multe cazuri, acolo unde modul de tratare prin geometrie devine atît de complicat încît se pierde orice claritate, geometria analitică duce la rezultat, rezolvînd problemele puse. Acest lucru trebuie considerat ca fiind de o mare importanță. Deoarece geometria analitică reduce la scheme de calcul probleme grele de geometrie, face posibilă folosirea unei metode de lucru rapide care, prin dinamica ei, duce de la sine la propoziții din a căror interpretare rezultă corelații nebănuite. Succesul incontestabil al unor astfel de metode se bazează în ultima analiză, pe structura însăși a spiritului omenesc.

SECRETUL CONTINUITĂȚII

Geometria analitică își găsește utilizare chiar în viața de toate zilele. Astfel, în economie evoluția prețurilor poate fi reprezentată printr-o curbă a cărei abscisă reprezintă timpul, în timp ce ordonata reprezintă prețurile. În figura 44 se dă un exemplu de felul în care trebuie înțeleasă noțiunea unei curbe în geometria analitică : punctelor de pe axa absciselor x le corespund ordonate y univoc deter-

minate şi finite. Corespondenţa apare din nou ca bază a unei noi forme de noţiuni. Valorile absciselor formează o mulţime în sensul arătat anterior, abscisa fiind denumită variabila independentă x. Mulţimea corespunzătoare a ordonatei y se înseamnă cu $f(x)$ — şi se citeşte „funcţiunea f

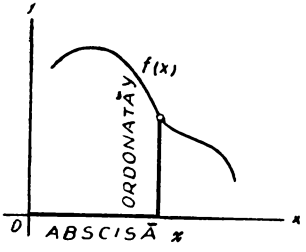


Fig. 44.

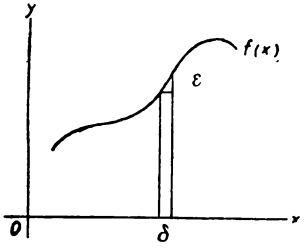


Fig. 45.

de x" — indicîndu-se că este vorba de o variabilă dependentă, mulţimea reprezentată prin ordonată formîndu-se prin corespondenţă din mulţimea x. Sîntem astfel în posesia noţiunii unei funcţiuni foarte generale, pe cînd în secolele trecute se cunoşteau numai funcţiuni speciale, ca, de exemplu, funcţiunile trigonometrice „sinus", „cosinus" şi aşa mai departe. Noţiunea de funcţiune, strîns înrudită cu noţiunea de corespondenţă, ocupă o poziţie predominantă în matematica modernă.

Să încercăm să scoatem în evidenţă cîteva principii importante, care tratează funcţiunile şi însuşirile acestora. Faptul că unele raţionamente par prea abstracte, iar altele foarte banale nu trebuie să ne sperie. Cu bunăvoinţă, înţelegerea nu este grea şi ne putem forma astfel o idee concretă asupra naturii matematicii superioare şi felul cum aceasta a evoluat în secolul al XIX-lea

Să ne ocupăm mai întîi de clasa mai importantă a funcţiunilor continue. Continuitatea este o denumire foarte sugestivă. Noi toţi ne închipuim că ştim cînd o curbă (şi, deci, şi funcţiunea reprezentată de curbă) este continuă. Se numeşte continuă curba care nu face salturi; intuitiv, ştim acest lucru. Sîntem totuşi obligaţi de a da continuităţii o definiţie strictă şi abstractă. Fără de ea, matematica de astăzi nu ar putea fi concepută, cu atît mai mult cu cît

noțiunea de continuitate trebuie extinsă asupra funcțiunilor generale exprimate prin corespondențe.

Deci, ce trebuie să înțelegem în general prin continuitate? Răspunsul la această întrebare a fost dat de-abia în secolul trecut, el fiind următorul: o funcțiune $y = f(x)$ este continuă atunci cînd sînt valabile următoarele: Oricît de mic ar fi un număr ε, există întotdeauna un număr δ, astfel încît dacă diferența între două valori x_1 și x_2 ale variabilei independente este mai mică decît δ, atunci și valorile funcțiunilor corespunzătoare $f(x_1)$ și $f(x_2)$ diferă între ele cu o valoare mai mică decît ε.

Această definiție lungă devine imediat clară dacă ne-o reprezentăm cu ajutorul unei figuri geometrice (fig. 45). Unor abscise apropiate între ele le corespund ordonate de asemenea apropiate între ele. Astfel de formulări care se repetă mereu și care, cu toate dificultățile pe care le prezintă, nu pot fi ocolite sînt denumite de matematicieni „Epsilontik"*, din cauza literei ε utilizată întotdeauna în acest caz. Aceste formulări trebuie să fie bine stăpînite de aceia care vor să lucreze cu funcțiuni.

Din figura 45 mai rezultă că în domeniul considerat de noi, în intervalul ales pe axa absciselor, curba atinge undeva un vîrf maxim. Cum se poate deduce acest lucru din definiția dată mai sus continuității? Calea care trebuie urmată este dificilă, ca întotdeauna cînd cunoștințe comune curente trebuie bine justificate. În acest caz trebuie să ne mulțumim să progresăm treptat.

Întîi să arătăm că toate ordonatele, adică toate valorile lui y dintr-un interval considerat se găsesc între două valori numerice, care pot fi foarte mari, dar care rămîn încontinuu valori finite. În acest caz se poate spune că „multitudinea de valori" a variabilei dependente y este limitată. Dacă nu ar fi acesta cazul, ar trebui să existe undeva, în intervalul dat, niște ordonate oricît de mari, care să tindă către infinit. Ca o urmare a acestui fapt, dacă s-ar împărți în două intervalul în care s-a definit funcțiunea, atunci cel puțin într-una din cele două jumătăți noi de interval, să zicem în cel din stînga, ar trebui să existe valori oricît de mari pentru y. Această jumătate din stînga

* Expresie utilizată în textul german.

se poate iarăşi înjumătăţi şi se poate din nou susţine că într-una din noile jumătăţi trebuie să existe un număr de valori oricît de mari pentru y. Evident că aceasta se poate repeta oricît de mult, obţinîndu-se astfel un şir de intervale din care fiecare este jumătatea intervalului precedent, fiind complet cuprins în acesta. Pentru a vorbi în limbaj matematic, ia astfel naştere un şir de intervale cuprinse unele în altele.

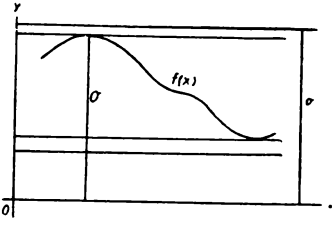


Fig. 46.

Toate aceste intervale au un punct comun şi numai unul singur, către care se strîng treptat intervalele şirului. Dacă funcţiunea ar fi continuă, atunci ar trebui ca ordonata să se deosebească în acest punct comun cu oricît de puţin faţă de ordonatele oricît de mari din vecinătate care tind spre infinit, fapt care în mod evident este imposibil. Astfel se ajunge la o contrazicere, rezultată din ipoteza că în intervalul considerat valoarea funcţiunii noastre nu este finită. Prin urmare nu ne rămîne decît să recunoaştem presupunerea contrară şi anume că toate valorile lui y trebuie să fie finite.

Un astfel de raţionament apare deseori în matematică şi l-am întîlnit şi în teoria mulţimilor. Spunem în acest caz că avem de-a face cu o demonstraţie indirectă. Aceasta este o metodă de care ne servim cînd atacarea directă a chestiunii apare a nu conduce la reuşită. Se porneşte atunci de la afirmaţia contrarie şi se arată că ea duce la o contrazicere.

S-a dovedit că ordonatele funcţiunii noastre sînt finite şi sînt situate între două valori finite. Ca urmare, curba din intervalul considerat se află situată în întregime într-o bandă orizontală. În continuare, încercăm să obţinem banda cea mai îngustă, pentru a limita pe cît posibil curba. Să notăm cu o ordonata limitei superioare (fig. 46); atunci, în mod evident, o nu poate fi mai mic decît oricare altă ordonată a curbei, deoarece, conform presupunerii, o trebuie să reprezinte pentru valorile lui y o limită superioară. Fiecare valoare admisibilă o defineşte o altă lăţime a benzii. Cu cît o este mai mic, cu atît banda se apropie mai mult

de curbă şi cu atît ea este mai îngustă. Se pune întrebarea : există o valoare minimă pentru o? Există o bandă care să fie cea mai îngustă? Se poate închipui existenţa acesteia în mod pur abstract?

Că întrebarea nu este banală se poate constata din exemplul următor. Fracţiile $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$... devin evident din ce în ce mai mici; totuşi, nu există nici una între ele care să fie cea mai mică din toate, deoarece pentru orice fracţie $\frac{1}{n}$ oricît de mică, se poate indica imediat o fracţie şi mai mică şi anume $\frac{1}{n+1}$; avem deci de-a face cu un şir care nu-şi va atinge niciodată valoarea cea mai mică.

Să ne întoarcem la teoria mulţimilor şi să considerăm mulţimea tuturor valorilor posibile ale lui o, adică a numerelor care, în intervalul considerat, sînt mai mari decît valorile lui y. Fiecare număr care este mai mare decît oricare valoare a lui o aparţine în mod evident acestei mulţimi şi matematicienii vorbesc de aceea în acest caz de o „tăietură" în domeniul numerelor, acesta descompunîndu-se într-o mulţime „superioară" şi o mulţime „inferioară". Fiecare număr din mulţimea superioară este mai mare decît orice număr din mulţimea inferioară. Tăietura se obţine întotdeauna începînd de la un număr care poate fi considerat că face parte din mulţimea superioară sau inferioară şi care, cu acelaşi drept, poate fi considerat sau ca cel mai mic număr al mulţimii superioare, sau ca cel mai mare număr al mulţimii inferioare. Importanţa fundamentală a acestui raţionament rezultă din faptul că *Dedekind*, la 24 noiembrie 1958, a reuşit să introducă numerele iraţionale ca o tăietură în domeniul numerelor raţionale.

Dacă se înseamnă cu litera O numărul obţinut la tăietura cu ordonata o, luată ca mulţime superioară, rămîne doar să se arate că numărul O este chiar ordonata limitei superioare o. Aceasta trebuie s-o dovedim indirect, deci să considerăm mai întîi că numărul O nu aparţine mulţimii de valori o, cu alte cuvinte există o ordonată care este mai mare decît numărul O, să zicem ordonata y_1. Atunci se poate indica un număr o_1 care, pe de o parte, ar fi mai

mare decît numărul O, deci mai mare decît al mulțimii căreia i-ar aparține numărul o. Pe de altă parte însă, ar fi mai mic decît y_1, fapt care ar fi în contrazicere cu definiția mulțimii o. Această contrazicere dispare numai atunci cînd numărul O aparține el însuși mulțimii valorilor o. În mod evident, numărul O determină limita superioară a benzii celei mai înguste pe care o căutăm. În mod asemănător se deduce ordonata care determină limita inferioară.

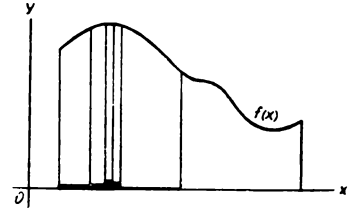


Fig. 47

În sfîrșit, sîntem în situația de a arăta că numărul O face parte din mulțimea de valori a variabilei dependente $y = f(x)$. Printr-o subîmpărțire continuă a intervalului abscisei, se obține un șir de intervale cuprinse unul într-altul, fiecare avînd o ordonată care se apropie cît mai mult de O. În punctul comun al acestui șir de intervale trebuie ca ordonata curbei să aibe valoarea O, din cauza continuității presupuse a ecuației $f(x)$. Prin aceasta am dovedit că în intervalul considerat curba atinge într-adevăr un maximum (fig. 47). Drumul parcurs a fost anevoios, fiind însă imperios cerut de pretențiile ridicate de matematica modernă în ceea ce privește stricteţea teoretică.

Atît obiectul în sine, cît și felul acestui raționament pot fi separate complet de geometria analitică, aparînd dudă aceea ca niște enunțuri „aritmetice" asupra funcțiunilor continue $f(x)$. Natural că nu toate funcțiunile sînt continue. Aceasta rezultă din noțiunea generală de funcțiune, care înseamnă corespondență, prin aceasta neindicîndu-se nimic despre continuitate.

Noțiunea de continuitate poate fi explicată și în alt mod decît am făcut-o pînă aici. Să considerăm comportarea într-un punct dat a funcțiunii considerată continuă. Valorile funcțiunii în vecinătatea acestui punct se apropie de valoarea ei în acel punct. Dacă notăm cu x_0 punctul dat și valorile vecine cu x, $f(x)$ este diferit de $f(x_0)$ cu o valoare mai mică decît ε, în cazul cînd x este suficient de apropiat de x_0.

Pentru ca cele expuse mai sus să fie transpuse în lim-

baj aritmetic, trebuie să ne amintim de definiţia care spune că prin valoarea absolută $|a|$ a unui număr a se înţelege însăşi numărul a, dacă a este pozitiv, şi numărul $-a$, dacă a este negativ. Se ia $|0| = 0$. Cu această notare, $f(x)$ este o funcţie continuă în punctul x_0, dacă $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pentru

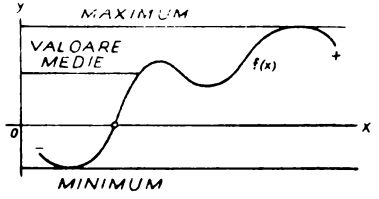


Fig. 48.

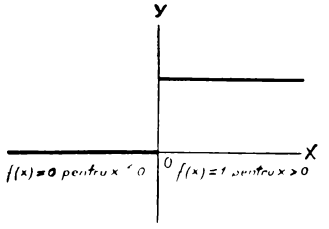


Fig. 49.

$|x - x_0| < \delta(\text{şi}\varepsilon)$. Notarea $\delta(\varepsilon)$ trebuie să indice în acest caz pentru fiecare număr ε dat, există întotdeauna un număr δ, care se poate introduce în inegalitatea de mai sus. Prima definiţie a continuităţii şi cu aceasta sînt echivalente.

După ce din continuitate s-a putut trage concluzia că o funcţiune continuă poate atinge un maxim într-un interval, se mai pot determina şi alte proprietăţi ale funcţiunilor continue. Dacă se schimbă semnul funcţiunii, atunci funcţiunea iniţială şi noua funcţiune sînt astfel una faţă de cealaltă, încît maximul uneia este minimul celeilalte. De aici rezultă că funcţiunea continuă poate avea şi un minimum. Funcţiunea continuă poate avea chiar orice valoare între maximum şi minimum. Pentru a demonstra acest lucru, să se ducă o paralelă z cu axa x care să taie axa y la înălţimea valorii intermediare. Dacă se înjumătăţeşte intervalul de pe axa x în care funcţiunea este continuă, aceasta ia, în punctul din mijloc, fie valoarea intermediară sau cu cel puţin unul din cele două jumătăţi de intervale, valori mai mari şi mai mici decît valoarea intermediară. Continuîndu-se înjumătăţirea intervalelor, se ajunge pînă la urmă la un punct. Din cauza continuităţii, curba ia în acest punct valoarea intermediară.

Mai puţin evidentă este teorema des întrebuinţată că o funcţiune continuă poate căpăta orice valoare aflată între valorile funcţiunii în cele două puncte finale ale unui interval, deoarece aceste două valori ale funcţiunii se află

cu siguranţă între maximul şi minimul funcţiei şi astfel cazul se subordonează teoremei enunţate anterior. De aci rezultă în special faptul că o funcţie continuă, dacă are valori pozitive şi negative, trebuie să taie negreşit axa abscisei. Toate aceste teoreme sînt explicate prin figura 48. În baza celor arătate mai sus, continuitatea joacă un rol important, însă nu exclusiv, deoarece pentru cercetări importante clasa funcţiilor continue ar fi prea restrînsă. Pentru funcţiile discontinue se pot da mai multe exemple simple, ca, de exemplu, funcţiunea care în stînga originei O, precum şi în origina O însăşi determină chiar axa absciselor, iar în partea dreaptă a originei reprezintă o dreaptă oarecare paralelă cu axa absciselor (fig. 49).

Poate că în primul moment o astfel de funcţiune apare ca neverosimilă. Nu este însă cazul, deoarece funcţiunea rezultă din raţionamente matematice foarte aprofundate.

Se mai indică încă modul cum se pot defini trecerile la limită cu ajutorul continuităţii : funcţiunea $f(x)$ ia pentru $x \to a$ valoarea limită $f(a)$, dacă este continuată în punctul a.

AHILE ŞI VALOAREA LIMITĂ

Filozoful grec *Zeno* obişnuia să povestească tuturor celor care voiau să asculte paradoxul lui *Ahile* şi al broaştei ţestoase, care se luaseră la întrecere. Se presupunea că *Ahile* aleargă de zece ori mai repede decît broasca ţestoasă, dînd însă acesteia, la început, un avans de zece paşi. În timp ce eroul *Ahile* parcurgea cei zece paşi, broasca ţestoasă făcea un singur pas. Dacă *Ahile* făcea şi acest pas, atunci avansul broaştei ţestoase era de numai $\frac{1}{10}$ paşi. Dacă *Ahile* parcurgea şi aceşti $\frac{1}{10}$ paşi, broasca parcurgea $\frac{1}{100}$ paşi şi aşa mai departe. Avansul broaştei ţestoase devenea din ce în ce mai mic, nescăzînd însă niciodată la zero, astfel că *Ahile* nu ar fi putut să ajungă niciodată broasca ţestoasă.

Prin acest sofism, *Zeno* voia să dovedească contemporanilor săi nesiguranţa oricărei cugetări. Argumentele acestuia, care au făcut o mare impresie, au fost respinse de

alți filozofi, printre care și *Aristotel*. Matematicienii trag din cele de mai sus concluzia că, în mod evident, *Zeno* nu cunoștea noțiunea de limită și că prin aceasta el trebuia să rămînă pentru totdeauna în afara domeniului minunat al matematicilor superioare. De altfel, calculul cel mai simplu ar fi trebuit să convingă pe *Zeno* că se înșală. După două secunde, *Ahile* a întrecut broasca țestoasă cu opt pași.

Cum se pot înlătura pe cale matematică dificultățile întîmpinate de *Zeno?* Să calculăm distanțele pe care le parcurge broasca țestoasă. Din acest calcul rezultă suma de pași $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots\ldots$, o sumă care astăzi se poate scrie ca o fracție zecimală, 1,111... Desigur că această progresie merge în continuare la infinit. Contrar lui *Zeno*, noi susținem însă că suma are totuși o valoare bine determinată, pe care o vom calcula imediat, avînd de-a face cu un caz special de progresie geometrică de tipul

$$q + q^2 + q^3 + \ldots\ldots,$$

în care pentru a obține progresia noastră, cu excepția primul termen, nu avem decît să punem $q = \frac{1}{10}$. Ce trebuie să se înțeleagă prin suma unei astfel de progresii? Pentru a o defini, se poate porni cel mai bine de la suma primilor n termeni, deci de la $q + q^2 + \ldots + q^n$, pe care s-o notăm cu s_n. În mod corespunzător, prin s_{n+1} înțelegem suma $q + q^2 + \ldots + q^{n+1}$. Pe de o parte este valabilă relația

$$s_{n+1} = s_n + q^{n+1}$$

pe de altă parte,

$$\begin{aligned} q\, s_n &= q^2 + q^3 + \ldots + q^{n+1} \\ &= (q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n+1}) - q \\ &= s_{n+1} - q \end{aligned}$$

prin urmare

$$s_{n+1} = q s_n + q.$$

Prin egalarea ambelor expresii obținute mai sus pentru s_{n+} rezultă :

$$s_n + q^{n+1} = q\, s_n + q,$$

deci

$$s_n = q\frac{1-q^n}{1-q}$$

Pînă acum totul este clar. Însă suma unei progresii finite nu prezintă dificultăţi. Să încercăm acum să ajungem la o progresie infinită şi să vedem cum se schimbă valoarea lui s_n atunci cînd n creşte? Deoarece doar membrul q_n este influenţat, valoarea lui s_n depinde deci numai de comportarea acestuia. Se deosebesc patru cazuri şi anume: $q = 1$, $q = -1$, $|q| > 1$, $|q| < 1$. Pentru primele două cazuri, ne vine în ajutor relaţia referitoare la s_n. Se vede că $1 + 1 + 1 + \ldots$ devine infinit de mare, în timp ce $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ formează un şir a cărui sumă este formată alternativ din valorile 1 şi 0 şi de aceea nu tinde către nici o valoare determinată.

Dacă valoarea absolută a lui q este mai mare decît 1, iar q este pozitiv, putem nota $q = 1 + k$, în care k este pozitiv. În acest caz $q^n = (1 + k)^n = (1 + k)(1 + k)\ldots$ $\ldots(1 + k) = 1 + n\,k + R$, în restul R fiind cuprinşi ceilalţi termeni rezultaţi din înmulţire. În orice caz, R este pozitiv şi de aceea $q^n > 1 + n\,k$. Membrul al doilea al acestei inegalităţi creşte o dată cu n pînă la infinit, din care cauză şi q^n creşte cu atît mai mult pînă la infinit. Mai exact, se poate spune că oricît de mare este un număr dat, q^n este întotdeauna mai mare decît acel număr de la o anumită valoare a lui n înainte. Pentru acest caz se utilizează semnul $q^n \to +\infty$. Evident că suma s_n creşte cu atît mai mult peste orice limită, adică $s_n \to +\infty$.

Dacă valoarea absolută a lui q este mai mare decît 1, însă q este negativ, atunci pentru puteri pare este valabil $q^n = |q|^n$, iar pentru puteri impare, $q^n = -|q|^n$. În acest caz se scrie $q^n \to \infty$, ceea ce înseamnă că valorile absolute ar putea fi oricît de mari, mărimea q^n nemaipăstrîndu-şi însă semnul iniţial. Prin aceasta rezultă şi pentru suma s^n, prin înlocuire în expresia dedusă pentru ea, $s^n \to \infty$. Pentru $|q| < 1$ rezultă $q^n \to 0$, ceea ce înseamnă că cu cît creşte n, puterea q^n devine oricît de mică. Se spune că q^n tinde către valoarea limită zero. În adevăr,

dacă se spune $q = 1 : p$, atunci $|p| > 1$, deci $p^n \to \infty$, din care, prin înlocuire, rezultă :

$$q^n = \frac{1}{p^n} \to \frac{1}{\infty} = 0$$

Astfel se obţine :

$$s_n = q\,\frac{1-q^n}{1-q} \to q\,\frac{1-0}{1-q} = \frac{q}{1-q}$$

Acum putem să calculăm drumul parcurs de broasca ţestoasă. După cum ne amintim, acesta era :

$$1 + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots\right).$$

Expresia din paranteză nu reprezintă altceva decît o progresie geometrică în care $q = \frac{10}{1}$. Conform expresiei noastre, suma rezultată este :

$$s = \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{9}$$

Deci, atunci cînd broasca ţestoasă a fost ajunsă de *Ahile*, ea parcursese în total $1^1/_9$ paşi. Acesta este un rezultat precis, care nu poate fi atins de nici un sofism filozofic. Din punct de vedere matematic, rezultatul de mai sus trebuie totuşi întărit prin stabilirea mai precisă a noţiunii de valoare limită.

Se poate observa în primul rînd că, ţinînd seama de rolul jucat de timp, *Zeno* ar fi putut să fie uşor combătut, fără însă ca prin aceasta să se poată explica dificultatea propriu-zisă şi anume noţiunea de trecere la limită. Într-adevăr, în timpul indicat pentru parcurgerea distanţelor, *Ahile* nu ar fi ajuns broasca ţestoasă. Însă timpul ar trebui să fie nesfîrşit de lung pentru a putea trage concluzia că *Ahile* nu ar fi ajuns broasca ţestoasă. După cum se poate constata, se întîmplă exact contrariul dacă ne gîndim unde ar fi ajuns *Ahile* după cîteva secunde şi unde ar fi ajuns broasca ţestoasă!

Dacă notăm un şir de numere cu a_1, a_2, $a_3 \ldots$, atunci numărul finit a se numeşte limita şirului, dacă începînd de la un anumit termen diferenţa dintre oricare termen a_n şi a devine oricît de mică. Se notează $a_i \to a$, adică în

cuvinte „a_n tinde către a". În cazul special cînd $a = 0$, şirul se numeşte un şir zero. Dacă valorile reciproce ale şirului $b_1, b_2, b_3 \ldots$ formează un şir zero, deci $1 : b \to 0$, atunci se spune că şirul $b_1, b_2, b_3 \ldots$ tinde către infinit, $b_n \to \infty$, mai precis către $+\infty$, dacă toţi membrii sînt pozitivi. Această definiţie coincide în mod evident cu definiţia dată anterior pentru valorile limită infinite.

Din cele spuse rezultă în continuare că dacă termenii şirului nostru se scriu sub forma $a_n = a + \alpha_n$, termenul α_n reprezintă un şir zero, deoarece dacă $a_n \to a$, trebuie în mod evident ca $\alpha_n \to 0$. Dacă se consideră în acelaşi timp un al doilea şir $b_1, b_2, b_3 \ldots$ avînd limita b şi dacă se notează $b_n = b + \beta_n$, β_n formează de asemenea un şir de zero. Din aceasta rezultă că şirul $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \ldots$, care se formează prin adunarea termenilor de acelaşi fel a celor două şiruri a_n şi b_n, trebuie să posede limita $a + b$, deoarece $a_n + b_n = (a + \alpha_n) + (b + \beta_n) = a + b + (\alpha_n + \beta_n)$; şi deoarece $\alpha_n + \beta_n \to 0$, atunci $a_n + b_n \to a + b$. În mod asemănător se procedează cu diferenţa, produsul şi cîtul a două şiruri, obţinîndu-se pentru acestea formulele următoare:

$$a_n - b_n \to a - b, \quad a_n\, b_n \to ab, \quad \frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}.$$

Putem utiliza imediat teorema conform căreia un şir ai cărui termeni cresc mereu, $a_1 < a_2 < a_3 \ldots$, şi care din această cauză se şi numeşte *monoton*, are o limită finită dacă toţi termenii a_n rămîn sub valoarea unui număr dat. Aceasta se constată din faptul că dacă în totalitatea numerelor se formează o tăietură prin împărţirea numerelor în două mulţimi, după cum acestea sînt mai mari sau mai mici decît suma tuturor termenilor a_n, numărul determinat prin această tăietură reprezintă limita şirului monoton.

DESPRE ARIA DOMENIILOR CU FRONTIERE CURBILINII

Încă din capitolele precedente am putut constata cît de greoi se pare că raţionează uneori matematicienii. Pentru aceştia, chiar şi cea mai banală afirmaţie nu pare sigură, ei trebuie mai întîi s-o dovedească în mod special

şi deosebit de detaliat. Din această cauză, nu trebuie să ne mire dacă şi tratarea problemei următoare ne va da de gîndit. Este vorba de problema fundamentală a determinării ariei figurilor geometrice. Din partea de la început a geometriei se ştie ce se înţelege prin suprafaţa unui triunghi sau a unui pătrat. În cazul cercului apar însă dificultăţi care arată că noţiunea de arie trebuie supusă unei cercetări mai precise. De altfel, chiar şi cunoscuta formulă a ariei unui triunghi — aria acestuia fiind egală cu jumătatea produsului dintre bază şi înălţime — conţine în mod tacit afirmaţia lipsei de importanţă a alegerii uneia din laturile triunghiului ca bază. În caz contrar, ar trebui să rezulte diferite valori pentru aria triunghiului, în funcţie de baza aleasă. Independenţa mărimii ariei faţă de baza triunghiului se poate dovedi prin mijloace simple.

Aria unei figuri compusă din două triunghiuri se impune să fie egală cu suma ariilor celor două triunghiuri, lucru care este într-adevăr valabil. Aşa avem posibilitatea să determinăm aria unui poligon, care se împarte în mai multe triunghiuri, din adunarea ariilor acestora rezultînd aria poligonului. La figurile mărginite de curbe, ca, de exemplu, aceea a cercului, această definiţie nu este însă valabilă, deoarece asemenea figuri nu se pot împărţi într-un număr finit de triunghiuri. Este deci necesară o definiţie mai cuprinzătoare decît cea iniţială. Din acest motiv nu este de loc evident că un cerc mărgineşte un domeniu cu o arie bine determinată, deşi nouă ni se pare normal acest lucru. Calculul ariei unui cerc este rezultatul unui raţionament al matematicilor superioare, deoarece aci intervine noţiunea de limită. Un poligon în care este înscris un cerc ale cărui laturi ating cercul are o suprafaţă mai mare decît un poligon care este înscris într-un cerc şi este deci cuprins în el.

Într-un cerc (fig. 50) se înscrie un poligon, construindu-se pe latura lui mereu alte triunghiuri, astfel încît figura formată să rămînă mereu înscrisă în cerc, cu alte cuvinte toate vîrfurile figurii să se afle pe cerc. Ariile poligoanelor astfel formate cresc mereu, rămînînd însă toate mai mici decît aria poligonului în care este înscris cercul. Din această cauză, ariile poligoanelor înscrise în cerc reprezintă un şir monoton crescător, care tinde către o limită finită şi anume

către aria cercului. Rămîne de arătat că limita este întotdeauna aceeaşi, indiferent de felul cum se alege şirul poligoanelor.

Pentru a ne da seama de acest lucru (fig. 51), trebuie să observăm că pentru un poligon înscris într-un cerc cu aria a_n există un poligon circumscris cercului avînd aria

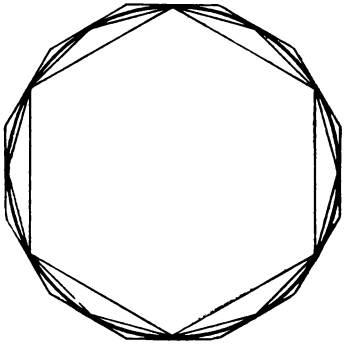


Fig. 50

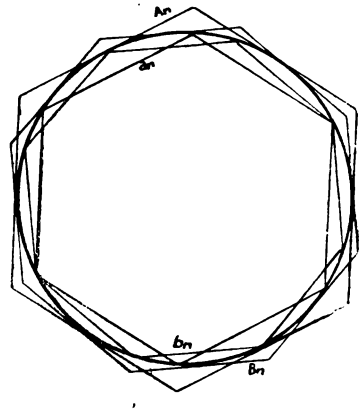


Fig. 51

A_n, astfel ca diferenţa $A_n - a_n$ să devină oricît de mică, atunci cînd amîndouă poligoanele se află în cuprinsul unei fîşii oricît de înguste în jurul cercului. În mod asemănător, B_n se referă la un al doilea şir de poligoane b_n înscrise în cerc. Dacă din poligoanele A_n şi B_n, circumscrise cercului, se ia în consideraţie numai aria lor comună, aceasta formează un poligon care mai cuprinde încă în el cercul. Dacă însemnăm aria noului poligon cu C_n, atunci sînt valabile neegalităţile : $a_n < C_n < A_n$ şi $b_n < C_n < B_n$. Atît a_n cît şi b_n tind, prin urmare, către aceeaşi limită, care este aria cercului. Această limită este independentă de şirul poligoanelor care au servit la tinderea spre limită.

Important este faptul că se poate dovedi că cercul posedă o arie perfect determinată, fără a calcula această arie. Matematicienii numesc asemenea cazuri teoreme de existenţă, pentru că ei dovedesc numai existenţa, fără să se preocupe dacă se poate face şi un calcul. Desigur că în cazul de faţă se poate calcula şi aria cu cîtă exactitate vrem, dacă se recurge la definiţia veche şi se consideră

un poligon circumscris cercului şi un poligon înscris în cerc, a căror arii diferă oricît de puţin între ele. Evident că aria cercului se află între aceste două valori. Putem însă renunţa la acest calcul, deoarece rezultatul acestuia se va dovedi ca un caz special al unei discipline în care odinioară *Arhimede* a creat lucruri uimitoare, o disciplină care mai tîrziu a fost uitată şi care a trebuit să fie din nou reluată în secolul al XVII-lea. Este vorba de calculul integral.

Este interesant de observat cum raţionamentul care a dus la determinarea suprafeţei cercului se subordonează noţiunii unei tăieturi în sensul arătat de *Dedekind*. Poligoanele înscrise se consideră ca o „mulţime inferioară", iar cele circumscrise cercului, ca o „mulţime superioară". Ariile acestor poligoane formează o mulţime de numere, în care aria cercului formează în mod evident o tăietură.

CE ESTE O INTEGRALĂ?

Pentru deducerea noţiunii de integrală se porneşte cel mai bine de la o curbă $f(x)$ care se ia în consideraţie în intervalul $[a, b]$, căutîndu-se aria care este cuprinsă între curbă, ambele verticale a şi b şi axa abscisei. Pentru aceasta se împarte intervalul în mai multe subintervale, construind din fiecare subinterval un dreptunghi, situat imediat sub curbă (fig. 52). Domeniul în formă de scară compus de aceste dreptunghiuri posedă o arie mai mică decît aria figurii mărginite la partea superioară de către curbă. Se presupune că printr-o împărţire în cît mai multe dreptunghiuri, figura geometrică formată din acestea se apropie din ce în ce mai mult de curbă şi din această cauză diferenţa dintre ariile celor două figuri geometrice poate deveni oricît de mică. Acest lucru este valabil nu numai pentru dreptunghiurile considerate care se găsesc complet sub curbă, ci şi pentru oricare alte dreptunghiuri care

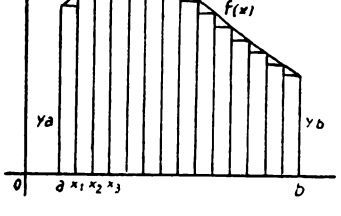


Fig. 52.

nu depășesc însă curba în fiecare interval parțial. Pentru a dovedi în mod strict justețea acestei ipoteze, se determină mai întîi aria unei astfel de figuri în scară formată din dreptunghiuri, calcul care, cel puțin din punct de vedere teoretic, nu constituie nici o dificultate.

Să însemnăm punctele de împărțire pe axa absciselor cu $a, x_1, x_2, \ldots, x_n, b$, și ordonatele corespunzătoare cu $y_a\ y_1, y_2, \ldots, y_n, y_b$. Pentru suma dreptunghiurilor rezultă expresia :

$$(x_1 - a)\, y_a + (x_2 - x_1)\, y_1 + \ldots + (b - x_n)\, y_n,$$

valorile $x_1 - a, x_2 - x_1, \ldots$ fiind bazele și ordonatele $y_a, y_1, \ldots$ fiind înălțimile acestor dreptunghiuri. Subîmpărțirea figurii în dreptunghiuri poate fi continuată, făcînd ca n să crească mereu. Se pune întrebarea dacă expresiile astfel formate nu tind către o limită bine determinată prin creșterea lui n, cum este cazul la progresiile geometrice. Dacă această limită există, atunci ea se numește integrala definită a funcțiunii $f(x)$ în intervalul $[a, b]$ indicîndu-se prin semnul :

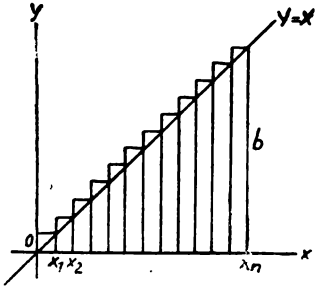


Fig. 53.

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

Semnul integralei este litera ∫, acesta trebuind să indice că este vorba de formarea unei sume.

Această metodă se poate explica mai bine cu ajutorul unui exemplu (fig. 53). Dacă alegem funcțiunea $y = x$, observăm că ea reprezintă o dreaptă care trece prin originea O. Să împărțim intervalul $[O, b]$, într-un număr egal de părți n, observînd că aci putem înlocui y cu x. În suma indicată mai jos :

$$(x_1 - O)\, y_1 + (x_2 - x_1)\, y_2 + \ldots + (b - x_{n-1}) y_n,$$

expresiile din paranteză reprezintă valoarea $b : n$ și y_i valoarea $i \,.\, b : n$. Dacă se dă în factor comun valoarea $b^2 : n^2$, rămîne în paranteză suma primelor n numere. Pentru suma indicată rezultă valoarea

$$\frac{b^2}{n^2} \cdot (1 + 2 + \ldots + n) = \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{2} b^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

care, pentru $n \to \infty$, tinde evident către valoarea $\frac{1}{2} b^2$, valoare care este corectă, fiind vorba de aria unui triunghi dreptunghic isoscel cu cateta b. Din fericire, după cum se va vedea mai tîrziu, integralele definite pot fi calculate mult mai simplu şi anume, prin integrare.

Să formulăm o teoremă fundamentală care să uşureze foarte mult calculul. În acest scop, noţiunea de funcţiune trebuie extinsă şi pentru cazul cînd nu se face o corespondenţă de la numere la numere ca pînă acum, ci de la numere la intervale : fiecărui interval Δ îi corespunde un număr $f(\Delta)$. Aria unui dreptunghi parţial considerat mai înainte este $f(\Delta)$.

De această dată funcţiunile continue ocupă un loc special şi se definesc iarăşi cu ajutorul lui „Epsilontic" ; pentru $\Delta < \delta(\varepsilon)$ este valabil $|f(\Delta)| < \varepsilon$. Noi luăm în considerare acele funcţiuni continue, pentru care este valabil sau $f(\Delta_1 + \Delta_2) \geqq f(\Delta_1) + f(\Delta_2)$ sau $f(\Delta_1 + \Delta_2) \leqq \leqq f(\Delta_1) + f(\Delta_2)$, cînd Δ_1 şi Δ_2 reprezintă două intervale învecinate. În acest caz, teorema fundamentală susţine că pentru aceste funcţiuni sumele :

$$f(\Delta_1) + f(\Delta_2) + \ldots + f(\Delta_n)$$

tind către o valoare bine determinată, atunci cînd subîmpărţirea intervalelor creşte foarte mult.

Demonstraţia este foarte simplă şi totuşi plină de învăţăminte, ea servind ca model pentru un număr mai mare de formaţii de integrale. Această demonstraţie este valabilă nu numai pentru integrala definită mai sus, ci şi pentru alte dezvoltări ale noţiunii de integrală. Pentru a ajunge, de exemplu, la aşa-numita integrala *riemaniană* se admit şi funcţiuni discontinue, alegîndu-se pentru figura geometrică în scară a fiecărui subinterval valorile cele mai mari posibile pentru y. În acest caz, fiecare din termenii sumei formează valorile unei funcţiuni $f(\Delta)$, căreia i se poate aplica teorema fundamentală. Prin aceasta s-a arătat că sumele tind într-adevăr către o limită, nedemonstrîndu-se însă tot ce s-a susţinut iniţial, deoarece pentru alte valori ale lui y rămîne încă de demonstrat dacă aceste noi valori mai tind către aceeaşi limită. Dacă valorile lui y sînt însă cele mai mici posibile, atunci teorema

fundamentală este din nou valabilă, la fel ca mai înainte. Se pune numai întrebarea, cînd coincide această limită cu aceea dinainte? Cazul va fi cu siguranţă acela cînd funcţiunea $y = f(x)$ este continuă, demonstrîndu-se prin aceasta existenţa unei valori limite bine determinate a unei integrale definite pentru funcţiunile continue. Nu este însă nevoie să ne limităm la acest caz. De exemplu, o funcţiune posedă o integrală definită chiar şi atunci cînd este discontinuă într-un număr finit de puncte, deoarece în vecinătatea fiecăruia din aceste puncte se poate considera un interval mic (lungimea totală a acestor intervale putînd fi în mod evident oricît de mică), astfel încît termenii respectivi să nu influenţeze formarea valorii limită.

Dacă şi funcţiunile discontinue pot avea integrale definite, rămîne să se cerceteze ce se înţelege prin aceasta din punct de vedere geometric, deoarece noi am pornit de la ariile unor anumite figuri geometrice, şi am ajuns astfel la sumele a căror limită reprezintă o integrală definită. La o funcţiune continuă nu există nici o îndoială că se poate considera integrala definită drept aria domeniului mărginit de funcţiune. La funcţiuni discontinue însă, trebuie să considerăm că din cauza locurilor discontinue, curbele care le reprezintă ies din cadrul raţionamentelor geometrice obişnuite.

Dar în acest caz poate să ne ajute teoria mulţimilor, care ne învaţă să considerăm figurile geometrice ca nişte mulţimi de puncte, formate din punctele tuturor ordonatelor care determină funcţiunea ca o curbă. Pornind de la acest fapt se poate pune în general problema, căror mulţimi de puncte pot să le corespundă un număr care să reprezinte aria sau conţinutul mulţimii. Această generalizare a noţiunii de conţinut ia denumirea de „măsură". În consecinţă, se cere ca măsura a două figuri geometrice care nu se suprapun să fie suma măsurilor acestor figuri. S-a arătat însă că această condiţie se poate generaliza chiar şi în cazul unei mulţimi infinite de figuri. Aceasta dă posibilitate unei generalizări a integralei, dată în secolul nostru de *Lebesgue*. Prin aceasta s-a creat o nouă teorie a funcţiunilor reale, unele din teoremele acesteia neputînd lipsi astăzi din fizică.

Diversele tipuri de integrale s-au născut din extinderea treptată a reprezentărilor geometrice înguste. Extinderea necesară a fost inițiată de teoria mulțimilor, care ne-a deprins să gîndim prin prisma mulțimilor de puncte. Cu aceste noțiuni trebuie să ne ocupăm atîta timp pînă cînd ne vor deveni obișnuite și prin aceasta, evidente.

DESPRE LINIILE CURBE ȘI TANGENTELE LOR

Dacă trebuie calculată o integrală definită, se utilizează calea care trece mai întîi prin derivate. În acest caz avem din nou de-a face cu o limită care se referă la o problemă din geometrie, adică d determinare a tangentelor, a acelor drepte care ating curba într-un punct (fig. 54). La un cerc este ușor să se construiască o tangentă. La capătul unui diametru oarecare al unui cerc se trasează o perpendiculară, aceasta avînd cu cercul un singur punct comun, punctul de tangență. Desigur că această construcție este posibilă numai la cerc. Atunci cînd ne referim la curbe diferite trebuie să luăm în considerare din nou limita. În acest scop, prin punctul de tangență se duce o dreaptă oarecare care să taie curba și în al doilea punct.

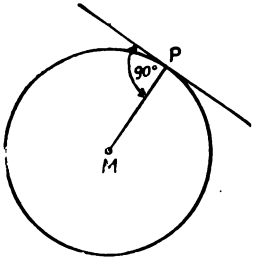


Fig. 54.

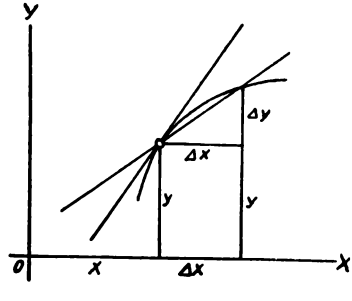


Fig. 55.

Această dreaptă o lăsăm să se rotească astfel în jurul punctului de tangență (fig. 55), încît al doilea punct să se apropie din ce în ce mai mult de punctul de rotire, pînă cînd ambele puncte coincid. Poziția limită atinsă astfel de dreaptă determină direcția tangentei în punctul considerat.

Pentru a reprezenta acum în calcule aceste raționamente, să ne închipuim o curbă de tipul $y = f(x)$ într-un sistem de coordonate rectangulare. Să însemnăm abscisa și ordonata punctului de tangență cu x și y, iar valorile corespunzătoare ale celui de al doilea punct de intersecție a dreptei cu curba cu $x + \Delta x$, $y + \Delta y$. Fracția:

$$\frac{(y + \Delta y) - y}{(x + \Delta x) - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

determină înclinarea dreptei față de axa abscisei, așanumita pantă, astfel după cum se poate deduce din triunghiul din figura 55. Dacă dreapta se rotește în jurul punctului x, y, atunci ambele puncte de intersecție se apropie între ele, astfel că atît Δx cît și Δy tind către zero. În orice poziție însă, panta dreptei este dată de raportul $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Va trebui să analizăm limita acestei expresii pentru $\Delta x \to 0$; să cercetăm dacă această limită există și, în caz afirmativ, ce valoare posedă. Această valoare se numește derivata funcțiunii $y = f(x)$ în punctul x. Ea se notează cu:

$$\frac{dy}{dx} \text{ sau } \frac{df(x)}{dx}$$

În vorbirea curentă se spune dy supra dx sau df de x supra dx. Se mai utilizează și scrierea prescurtată $f'(x)$.

Derivata astfel determinată indică în mod evident panta tangentei în punctul x, y sau direcția pe care o are curba în acest punct; prin aceasta, problema de bază a calculului diferențial este rezolvată. Să dăm un exemplu simplu. Fie: $y = f(x) = ax + b$. În acest caz: $y + \Delta y = a(x + \Delta x) + b$, deci $\Delta y = a.\Delta x$ și, în sfîrșit:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a\,\Delta x}{\Delta x} = a.$$

În acest caz, raportul Δy către Δx este întotdeauna egal cu a, chiar dacă se trece la limită. Creșterea funcțiunii $y = ax + b$ este, în fiecare punct x, y, întotdeauna egală cu a, fapt ce nu trebuie să ne surprindă, deoarece funcțiunea considerată reprezintă o dreaptă cu panta a, tangenta la o dreaptă coincizînd cu însăși dreapta.

În mod asemănător se calculează derivata parabolei reprezentată de funcţiunea $y = x^2$ (fig. 56). Rezultă :

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

După cum se constată, în acest caz relaţia dintre curbă şi panta acesteia este ceva mai complicată. Cu cît este mai mare x, cu atît este şi panta mai mare, deci şi curba este mai abruptă. O privire asupra figurii 56 ne confirmă acest lucru. Prin aceasta am învăţat să „diferenţiem" două funcţiuni foarte simple. În mod surprinzător, cu ajutorul celor două rezultate obţinute mai sus, stăpînim rezolvarea unei categorii mari de funcţiuni. Pentru diferenţiere există, după cum vedem, anumite reguli simple de calcul. Dacă $f(x)$ şi $g(x)$ sînt două funcţiuni, atunci :

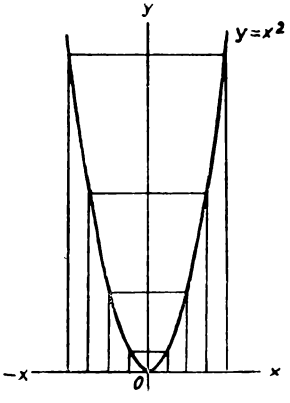


Fig. 56.

$$\frac{d\,[f(x) + g(x)\,]}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx},$$

aşadar suma a două funcţiuni se diferenţiază prin formarea sumei derivatelor lor, adică se diferenţiază fiecare termen al funcţiunii. Acest lucru este uşor de dovedit, dacă ne amintim regulile formulate în general pentru calculul limitelor. Referindu-ne la definiţia derivatei putem scrie :

$$\frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)\,] - [f(x) + g(x)\,]}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Dacă în acest caz se trece la limită, rezultă că afirmaţia noastră este justă. De asemenea este valabil :

$$\frac{d(f-g)}{dx} = \frac{df}{dx} - \frac{dg}{dx}.$$

n mod asemănător se obține regula conform căreia se diferențiază un produs :

$$\frac{d(fg)}{dx} = \frac{df}{dx} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dx} \cdot$$

Pentru derivarea unui cît, deci pentru formarea expresiei :

$$\frac{d\left(\frac{f}{g}\right)}{dx}$$

se utilizează un artificiu de calcul. În acest scop se formează ecuația banală $f = g \cdot f : g$, aplicîndu-se în partea dreaptă regula de mai sus privitoare la diferențierea unui produs. Astfel rezultă :

$$\frac{d\left(\frac{f}{g}\right)}{dx} = \frac{\frac{df}{dx} \cdot g - f \cdot \frac{dg}{dx}}{g^2}$$

Aceste reguli de calcul fac posibile diferențierea unui mare număr de funcțiuni, în mod schematic, fără ajutorul altor raționamente. Pentru a deriva ecuația $y = x^4$ este nevoie să scriem numai $y = x^2 \cdot x^2$ și să utilizăm regula produsului pentru a obține imediat rezultatul :

$$\frac{dx^4}{dx} = 4x^3.$$

În mod asemănător se obține :

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \cdot$$

Putem, în continuare, să diferențiem funcțiuni compuse din astfel de termeni, care luați individual, formează sume, diferențe, produse sau cîturi, ca, de exemplu : $7x^4 + 2x^2 + x + 19$ sau :

$$\frac{ax^n + bx^m + c}{dx^k + e} \cdot$$

Uneori, calculul poate să fie oarecum obositor, neprezentînd însă din punct de vedere teoretic nici o dificultate.

Se constată cît este de mare folosul acestui gen de calcul, pe care îl datorăm lui *Leibniz.*

Să utilizăm în sfîrşit acest calcul la ecuaţia $\frac{x}{\log x}$, la numitor fiind vorba de logaritmul natural. Obţinem ca derivată $\frac{1}{\log x} - \frac{1}{\log^2 x}$ o valoare care este pozitivă atunci cînd x este mai mare decît baza e a logaritmilor. Conform definiţiei, rezultă însă că o derivată continuu pozitivă reprezintă întotdeauna caracteristica unei funcţiuni crescătoare monotonă. Dacă, de exemplu, x_1 şi x_2 sînt două numere naturale în care $x_1 > x_2 > 2$, atunci:

$$\frac{x_1}{\log x_1} > \frac{x_2}{\log x_2}$$

deci:

$$e^{x_1 \log x_2} > e^{x_2 \log x_1}$$

sau altfel exprimat:

$$x_2^{x_1} < x_1^{x_2}$$

Demn de remarcat este faptul că rezultatul se referă la numere naturale, neputîndu-se observa într-însul că a fost obţinut prin derivare. Dacă, de exemplu, considerăm $x_1 = 27$ şi $x_2 = 3$, rezultă că numerele 3^{27} şi 27^3, care se mai pot scrie şi

$$3^{(3^3)} \text{ şi } (3^3)^3$$

vor fi diferite. Contrar adunării şi înmulţirii, ridicarea la o putere oarecare a unui număr nu este o operaţie nici comutativă, nici asociativă.

Operaţia de derivare poate fi îndreptată încă în două direcţii. Derivata $y' = f'(x)$ poate fi din nou derivată. Aceasta se poate face ca la orice altă funcţiune. Această nouă derivată se notează precum urmează:

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

şi este numită „derivata a doua" a funcţiunii iniţiale $y = f(x)$. Mergînd în continuare se formează derivata a treia:

$$y''' = f'''(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \text{ ş. a. m. d.}$$

Acest mod de scriere poate fi întrucîtva simplificat prin introducerea semnului D, care înseamnă un „operator". Litera D înseamnă că trebuie făcută operaţia de derivare a unei funcţiuni. În acest caz, operatorul D dă o nouă funcţiune şi anume derivata $DF(x) = f'(x)$. În mod analog $Df'(x) = f''(x)$ ş.a.m.d. Avantajele acestei noi metode de scriere sînt redate într-un „supracalcul", pe care l-a dezvoltat *Oliver Heaviside* şi care înlocuieşte problemele de calcul diferenţial prin probleme mai simple, algebrice.

Pînă acum am vorbit de funcţiuni cu o singură variabilă x, care s-au format făcînd să corespundă fiecărui punct de pe o dreaptă — axa absciselor — cîte un număr $y = f(x)$. Această noţiune de funcţiune se poate extinde cu uşurinţă prin luarea în consideraţie a unor puncte în tot planul sau chiar în spaţiu. Din geometria analitică se ştie că fiecare punct dintr-un plan este determinat de două coordonate x şi y. Dacă într-un mod oarecare facem să corespundă fiecăruia din aceste puncte o valoare, rezultă o funcţie de două variabile $f(x, y)$. Un punct în spaţiu este determinat de trei coordonate x, y şi z; şi în acelaşi mod se poate forma şi aci o funcţiune $f(x, y, z)$ de trei variabile independente. Din punct de vedere al calculului se pot forma funcţiuni cu un număr foarte mare de variabile. Definiţiile date de noi mai înainte continuităţii şi derivării se pot extinde cu uşurinţă şi în aceste cazuri. Pentru aceasta se variază întîi o singură variabilă, menţinîndu-se celelalte variabile constante. Pentru rezolvarea derivatei $f(x, y)$ în raport cu x, se formează fracţia:

$$\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

şi se trece la limită pentru $\Delta x \to 0$. Dacă această limită există, aceasta este numită „derivata parţială" a lui f în raport cu x şi se însemnează:

$$\frac{\partial f}{\partial x}.$$

În mod asemănător se formează expresia:

$$\frac{\partial f}{\partial y}.$$

În acest caz este de mare însemnătate teorema pe care vrem s-o formulăm acum. Dacă pentru o curbă $f(x)$ ordonatele sînt egale în două puncte a şi b şi curba are în toate punctele intervalului $[a, b]$ cîte o tangentă, atunci este uşor de înţeles din punct de vedere geometric că în cadrul intervalului $[a, b]$ trebuie să existe un punct ξ, în care tangenta să fie paralelă cu axa absciselor (fig. 57). Aceasta înseamnă că în acel punct creşterea devine egală cu zero, deci $f'(\xi) = 0$ (fig. 57). Evident că punctul unde funcţiunea atinge un maxim sau un minim este un astfel de loc, deoarece din derivare rezultă că în intervalul $[a\ b]$ curba este continuă. În caz contrar, creşterea nu poate tinde către o limită finită, deoarece pentru un numitor oricît de mic Δx al unei funcţiuni discontinue, numărătorul Δy ar deveni o mărime infinită. Dacă funcţiunea $f(x)$ este continuă, atunci ea are în cadrul intervalului $[a, b]$ un maxim $f(\xi)$, astfel că $f(\xi) \geqq f(\xi + \Delta\xi)$. Pentru $\Delta\xi$ pozitiv, creşterea în locul ξ ar fi negativă, iar pentru $\Delta\xi$ negativ, creşterea ar fi pozitivă. În asemenea cazuri limita posibilă poate fi numai zero.

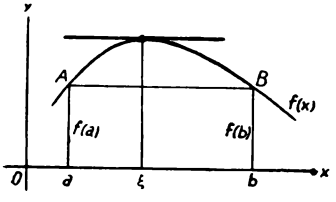


Fig. 57.

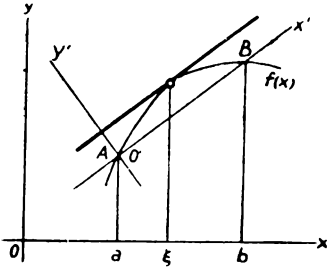


Fig. 58.

Teorema demonstrată mai sus este echivalentă cu cunoscuta teoremă a creşterilor finite din calculul diferenţial, care pentru o funcţiune ce se poate deriva $f(x)$ susţine următoarele: dacă $f(a)$ este valoarea funcţiunii în punctul a şi $f(b)$ valoarea în punctul b, atunci în intervalul $[a, b]$ există întotdeauna un loc ξ pentru care este valabilă relaţia $f(b) = f(a) + (b - a)f'(\xi)$, din care rezultă că :

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Membrul din dreapta este egal cu panta dreptei cuprinse între A şi B (fig. 58) şi teorema creşterilor finite susţine că derivata este egală cu panta, cel puţin într-un loc ξ în cadrul intervalului $[a, b]$. Exprimat geometric, înseamnă că tangenta în punctul ξ este paralelă cu dreapta AB.

Din această formulare geometrică rezultă cu claritate echivalenţa ambelor teoreme. Dacă se duce un nou sistem de coordonate astfel încît axa absciselor să treacă prin punctele A şi B (fig. 58), atunci în acest sistem nou de coordonate funcţiunea $f(x)$ are valori egale în punctele finale ale intervalului, şi anume $f(a) = f(b) = 0$. Acum se poate aplica teorema demonstrată mai înainte. În intervalul $[a, b]$ trebuie să existe un loc unde derivata f' să fie egală cu zero, adică acolo unde tangenta este paralelă cu noua axă a absciselor, deci paralelă cu dreapta AB. Prin aceasta se demonstrează teorema creşterilor finite, care conţine o afirmaţie importantă asupra comportării derivatei. În cazul de faţă noi renunţăm la dezvoltarea mai departe a acesteia.

Să facem încă cîteva observaţii generale. Deseori este mai indicat să nu se utilizeze derivata $f'(x)$, ci diferenţiala funcţiunii $f(x)$. În acest caz dx-urile sînt mărimi ca acelea care se întîlnesc şi în algebra abstractă. Dacă numărul $f'(x)$ se înmulţeşte cu dx, atunci produsul se numeşte diferenţiala funcţiunii $f(x)$ şi se notează cu $df(x)$. În mod analog şi diferenţialele funcţiunilor $f(x, y)$ cu mai multe variabile se concep ca expresii de forma :

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

în care dx şi dy sînt mărimi de genul indicat mai înainte, ceea ce înseamnă că aceste mărimi pot fi arbitrare, însă întotdeauna valori finite.

Au trecut secole pînă ce aceste noţiuni au putut fi lămurite şi merită să cercetăm cum le-a fost posibil matematicienilor secolelor trecute să ajungă la rezultate fundamentale corecte. Explicaţia constă în faptul că s-a utilizat calculul infinitezimal. Desigur că aceasta nu înseamnă că utilizarea formală a calculului infinitezimal dă întotdeauna rezultate exacte. La început s-a greşit, în special atunci cînd s-au luat în considerare dezvoltări de serii care nu tindeau către o limită. Insuficienţele calculului infinitezi-

mal trebuiau deci să fie completate prin raţionamente suplimentare. Totuşi, crearea calculului cu simboluri, care a făcut eficace calculul infinitezimal, rămîne o mare realizare ştiinţifică a lui *Leibniz*, a cărui inspiraţie matematică genială a sezisat instinctiv miezul problemei şi a îndepărtat cu hotărîre neclarităţile şi insuficienţele demonstraţiei.

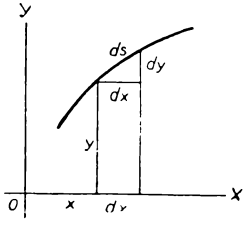


Fig. 59.

Să mai amintim cîteva lucruri cu privire la mărimile infinit de mici, care timp de secole au servit ca bază calculului infinitezimal în locul unei demonstraţii stricte, care să se bazeze pe valorile limită. Se vorbea des şi amănunţit despre mărimile infinit de mici, ceea ce era un semn că noţiunile nu erau încă pe deplin clarificate. Cu toate că după concepţia noastră de astăzi mărimile infinit de mici se bazau pe o iluzie a matematicienilor, cu ajutorul acestora s-au obţinut deseori rezultate exacte. Acest fenomen paradoxal poate fi explicat printr-un exemplu (fig. 59). Să considerăm o curbă care poate fi împărţită în porţiuni infinit de mici, aşa-numite elemente de arc *ds*, din care fiecare poate fi considerat ca o dreaptă infinit de mică. Dacă se aplică teorema lui *Pitagora* (pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor), se obţine cu ajutorul acesteia expresia exactă a diferenţialei arcului $ds^2 = dx^2 + dy^2$, din care rezultă prin integrare lungimea finită a arcului. Din teorema noastră fundamentală se poate obţine de asemenea, fără dificultăţi, lungimea arcului.

Orice raţionament care utilizează mărimi infinit de mici păstrează un grad oarecare de nesatisfacţie (cu toate că duce mai repede la ţintă decît raţionamentele exacte), deoarece un raţionament imperfect nu dă niciodată siguranţă exactităţii rezultatului. Strict vorbind, nu există puncte situate infinit de aproape unele de altele, aşa cum am considerat în exemplele noastre, deoarece dacă voim să ajungem la un rezultat cu coordonate formate din numere obişnuite, două puncte trebuie să aibă întotdeauna între ele o distanţă finită. Dacă deducţia descrisă se consideră evidentă, atunci se recunoaşte implicit posibilitatea

concepţiei noastre de a evolua, nemaiaplicîndu-se, în mod restrîns, doar la distanţe obişnuite.

Mai trebuie spus că numai unei anumite categorii de curbe îi corespund lungimi de arce, fapt care nu iese de loc în evidenţă în raţionamentul făcut anterior. Dacă totuşi se reprezintă diferenţialele prin segmente de linii, atunci se ţine seama numai parţial de condiţiile reale, de altminteri la fel ca în cazul liniilor desenate, care posedă în mod evident o lăţime finită. În ambele cazuri, valabilitatea utilizării acestor reprezentări constă în faptul că este suficientă existenţa unei concordanţe reduse pentru descoperirea unor relaţii exacte.

Numai raţionamentele precise ne asigură posibilitatea de a ne da seama de gradul de utilizare a calculului diferenţial. Acum un secol, un celebru matematician susţinea că o funcţiune continuă poate fi întotdeauna derivată. El susţinea această afirmaţie printr-o discutabilă demonstraţie. Astăzi sîntem însă în măsură să formăm funcţiuni continue într-un interval întreg, acestea neputînd totuşi fi derivate în nici un loc din acest interval. Timpurile în care nu avea importanţă exactitatea unei demonstraţii au trecut de mult, în orice caz pentru matematicieni. Desigur că în fizică se mai întîlnesc încă şi astăzi raţionamentele comode de odinioară, ca, de exemplu, atunci cînd se vorbeşte de un spaţiu care conţine un număr mare de molecule şi care este în acelaşi timp infinit de mic. În asemenea cazuri se întîlnesc în mod cert noţiuni asemănătoare cu acelea descrise în cazul lungimilor de arc.

PRACTICA ESTE MAI IMPORTANTĂ DECÎT TEORIA

Din orice operaţie matematică se poate obţine în modul cel mai simplu un progres matematic; pentru aceasta nu este necesar altceva decît de a face operaţia inversă. Astfel, din adunare se obţine printr-o inversare o operaţie nouă şi anume scăderea. Aceasta rezultă din problema următoare : avem două numere, a şi b, şi se caută un al treilea număr c, care adunat cu a să dea numărul b. Exprimată în formule, problema se prezintă astfel : $a + c = b$, deci $c = b - a$. Aşa cum este scăderea faţă de adunare, este şi operaţia de

diferențiere față de integrare : una din acestea este inversă celeilalte. La operația de diferențiere era dată o funcțiune $f(x)$ și se căuta derivata acesteia $f'(x)$. Problema operației de integrare este inversă și anume : se dă o funcțiune $f(x)$ și se caută o funcțiune $F(x)$ a cărei derivată să fie funcțiunea $f(x)$. Funcțiunea căutată se numește integrala nedeterminată a funcțiunii $f(x)$ și se exprimă prin $\int f(x)\,dx$. Deci avem :

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Dacă se dă de exemplu funcțiunea $f(x) = 2x$, atunci integrala funcțiunii date va fi $\int 2\,x\,d\,x = x^2$, deoarece :

$$\frac{dx^2}{dx} = 2x.$$

Așadar, integralele se pot găsi prin încercări, din păcate prea mult prin încercări, deoarece nu există reguli de calcul care să fie întotdeauna ușoare și sigure și să ducă la țel fără multe dificultăți. Există și la calculul integral anumite reguli care dau posibilitatea de a stabili integrale complicate în baza unora mai simple, situația fiind totuși cu mult mai defavorabilă decît la operația de diferențiere. În acest caz se poate spune și în matematică că practica este mai importantă ca teoria. Din fericire, oamenii au întocmit tabele în care sînt date integralele multor funcțiuni.

Inversarea unei operații poate da rezultate diferite. Acesta nu este cazul la scădere, deoarece diferența $b - a$ are ca rezultat un singur număr, însă inversarea unei ridicări la putere, adică extragerea unei rădăcini, dă mai multe rezultate ; astfel, rădăcina pătrată din 4 poate fi $+2$ sau -2. Operația de integrare duce la un număr infinit de soluții, care de altfel se deosebesc între ele numai prin valori constante. Dacă $F(x)$ și $G(x)$ sînt două integrale ale funcțiunii $f(x)$, atunci sînt valabile ecuațiile :

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \text{ și } \frac{dG(x)}{dx} = f(x),$$

deci $F' - G' = 0$, sau $(F - G)' = 0$, adică derivata diferenței $F(x) - G(x)$ trebuie să fie identic zero, lucru valabil numai pentru o constantă ; așadar $F = G + c$, în care caz c reprezintă o constantă oarecare.

Una din aceste infinit de multe integrale este integrala definită, pe care am întîlnit-o mai înainte. Aceasta rezultă atît din definiţia aritmetică cît şi din interpretarea geometrică. Să rămînem la aceasta din urmă. De această dată este vorba despre creşterea integralei, care reprezintă de asemenea o funcţiune. Creşterea integralei, definită prin cîtul dintre creşterea ordonatei şi creşterea abscisei, este cuprinsul suprafeţei fîşici dintre b şi $b + \Delta b$, împărţit prin lungimea Δb. Această fîşie poate fi înlocuită printr-un dreptunghi cu o înălţime care, atunci cînd Δb devine extrem de mic, tinde către mărimea ordonatei în punctul b.

Din cele arătate am obţinut o privire generală asupra bazelor calculului infinitezimal. Înaintea lui, funcţiunile se diferenţiau şi se integrau cu succes, fără însă să se recunoască că una din aceste operaţii este inversul celeilalte, recunoaştere care formează tocmai miezul problemei. Calculul infinitezimal se aseamănă astăzi cu o baghetă magică în mîna matematicienilor. Probleme care în mod aparent sînt foarte îndepărtate între ele, se supun poruncii lui. Calculul infinitezimal permite dezvoltarea oricărei funcţiuni sub forma unei serii uşor de cercetat, crearea unui mod unic de determinare a tangentelor şi a ariilor, noţiunile cu care el operează fiind destul de largi ca să scoată în evidenţă punctele comune ale acestor concluzii. În acest caz cor statăm din nou că crearea de noţiuni cuprinzătoare, care se obţin prin slăbirea premiselor, a făcut un progres enorm. Astăzi se rezolvă cu uşurinţă probleme pe care cu cîteva sute de ani înainte savanţii nu izbuteau să le rezolve. Se poate spune că fără calculul infinitezimal nu s-ar putea concepe epoca noastră tehnică.

LA O PARTE CU EUCLID

Să mai facem unele completări cu privire la utilizarea calculului infinitezimal în geometrie. Noi ştim că lungimea arcelor de curbe se poate exprima sub forma unei integrale definite. Deformările prezentate de curbe pot fi considerate ca nişte transformări ale acestor integrale. Acest fapt ne dă speranţa ca, cu ajutorul calculului infinitezimal, să atacăm o problemă importantă şi anume : cum şi cînd se pot modifica suprafeţe, astfel ca proporţiile lor dimensionale să nu se

modifice. Pentru aceasta se dă următorul exemplu : suprafaţa laterală a unui con se poate secţiona de-a lungul unei generatoare şi apoi poate fi desfăşurată pe un plan. Din punctul nostru de vedere obişnuit, considerat într-un spaţiu tridimensional, această metodă înseamnă o modificare foarte importantă de configuraţie a suprafeţei conului, care dintr-o suprafaţă în spaţiu devine o suprafaţă plană. O fiinţă bidimensională însă, care ar trăi pe această suprafaţă şi care nu ar şti că spaţiul în care se află suprafaţa este tridimensional, ar observa ceva neobişnuit numai atunci cînd s-ar afla la noile margini ale universului său. Reperele după care s-ar putea orienta ar fi numai relaţiile dintre dimensiunile suprafeţei, ca, de exemplu, raportul dintre circumferinţa şi diametrul unui cerc, care nu se modifică în cazul desfăşurării conului.

O cercetare sistematică a acestor probleme a fost începută destul de tîrziu. Pentru a putea utiliza în acest caz calculul infinitezimal este necesară o restricţie pe care se sprijină întotdeauna şi în întregime geometria diferenţială şi anume : din figurile de care ne ocupăm, curbe sau suprafeţe, raportate la un sistem de coordonate, trebuie să rezulte funcţiuni care să se poată diferenţia. La prima vedere, această restricţie pare să fie condiţionată de metoda utilizată şi din acest motiv pare să fie artificială. La o cercetare mai atentă, această părere se atenuează, luîndu-se în considerare că curbele analizate trebuie să posede lungimi de arce, ceea ce este posibil numai atunci cînd ele se pot diferenţia aproape pretutindeni.

Rezultă că relaţiile geometrice referitoare la suprafeţe se deosebesc în general destul de mult de acelea pe care le cunoaştem din plan şi care sînt cuprinse în geometria denumită astăzi euclidiană. În geometria euclidiană, obişnuită, suma unghiurilor unui triunghi este de 180°, raportul dintre circumferinţă şi diametrul cercului este egal cu π, printr-un punct se poate duce numai o paralelă la o dreaptă şi aşa mai departe. Pe o suprafaţă oarecare, aceste teoreme nu mai sînt în general valabile. Astfel, pe un glob (fig. 60) există triunghiuri avînd suma unghiurilor de 270° şi cercuri a căror circumferinţă este de două ori mai mare decît diametrul, π fiind deci înlocuit cu valoarea 2. Prin măsurători făcute pe suprafaţa globului pămîntesc s-ar putea,

aşadar, dezminţi părerea anticilor că pământul ar fi ca un taler.

Noi cunoaştem perfect geometria care se poate aplica la o suprafaţă de îndată ce ştim expresia lungimilor de arce, pentru care este suficient să cunoaştem diferenţiala arcului, din care prin integrare rezultă lungimea arcului. În mod

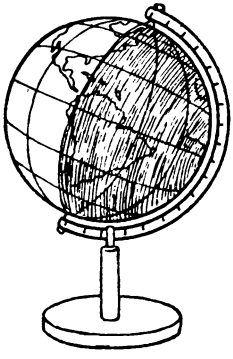


Fig. 60.

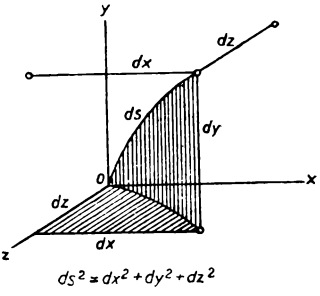


Fig. 61.

asemănător cu cazul curbelor plane se determină elementul de arc *ds* din diferenţialele coordonatelor *dx*, *dy*, *dz* cu ajutorul teoremei lui *Pitagora* : $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ (fig. 61). Trebuie însă să ţinem seama că de data aceasta *x*, *y*, *z* reprezintă puncte de pe suprafeţe, fiind deci formaţiuni bidimensionale. Din punct de vedere analitic, aceasta înseamnă că *x*, *y*, *z* trebuie introduse ca funcţiuni de două variabile, pe care să le numim *u* şi *v*. În acest caz, diferenţialele din partea dreaptă a relaţiei pentru elementul de arc se pot transforma conform relaţiilor :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\, du + \frac{\partial x}{\partial v}\, dv.$$

Aceste valori pot fi introduse în formula noastră. Rezultă pentru pătratul elementului de arc ds^2 o expresie pătratică, care reprezintă pe ds^2 în funcţie de *du* şi *dv*. Coeficienţii rezultă din derivatele parţiale :

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \ldots$$

Această expresie generală pentru ds^2 conține teorema lui *Pitagora* ca un caz particular.

Astfel, există posibilitatea de a extinde geometria euclidiană prin slăbirea ipotezei, în sensul că elementul de arc este reprezentat cu ajutorul teoremei lui *Pitagora*, admițîndu-se însă expresia pătratică mai generală. Deoarece această expresie determină relațiile dimensionale, ea este denumită forma metrică de bază. Mai putem, de asemenea, să ne liberăm de îngrădirea bidimensională înlocuind perechea de valori u și v, prin n numere, care să fie considerate ca puncte și prin aceasta să se poată trece la geometria riemaniană cu n dimensiuni.

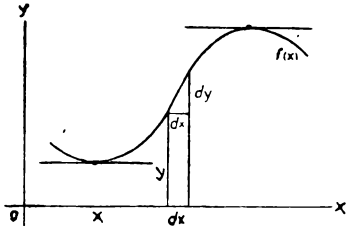


Fig. 62.

ÎNVINGĂTOR ÎN ÎNTRECEREA CONȚINUTURILOR

Un alt domeniu de utilizare a calculului infinitezimal îl formează problema valorilor maxime și minime ale unei funcțiuni. La deducerea teoremei creșterilor finite s-a arătat că în punctul unde curba prezintă un maxim, derivata trebuie să devină egală cu zero. Același lucru este valabil și pentru un minim al curbei. În punctul unde curba are valoarea cea mai mică, derivata acesteia este iarăși egală cu zero (fig. 62). S-a vorbit în mod special de o valoare maximă sau minimă, deoarece în cadrul raționamentului făcut presupunem că curba poate lua pe o porțiune mică un număr de valori mai mici decît în punctul considerat; ar putea deci să existe mai multe puncte maxime, cum este de altfel cazul la o linie ondulată (fig. 63). Trebuie să observăm deci că dispariția derivatei formează într-adevăr o condiție necesară pentru ca curba să aibă un maxim sau un minim, însă aceasta nu este cu totul suficient pentru a putea susține cu siguranță acest lucru. Maximul și minimul pot fi cuprinse într-o denumire comună de „extreme", putîndu-se afirma că pentru o extremă dispariția derivatei este necesară, însă nu suficientă.

Cazurile considerate pînă aci sînt dintre cele mai simple. Se dă o anumită curbă şi se cere să găsim punctul unde curba are o extremă. Situaţia devine cu mult mai complicată atunci cînd se cere determinarea unor valori extreme, care depind de forma curbei, ca, de exemplu, aceea a ariei maxime pe

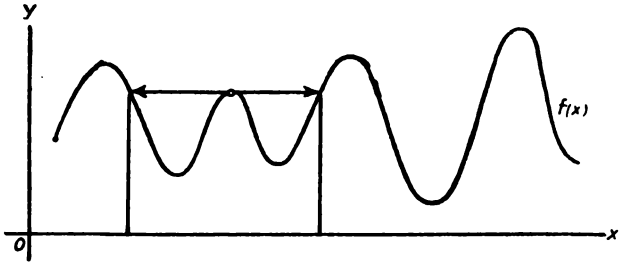


Fig. 63.

care o formează arcul unei curbe cu coarda lui, în cazul cînd sînt date lungimea arcului şi punctele extreme ale coardei. Formularea analitică a acestei probleme conduce la o integrală definită a cărei valoare depinde de forma curbei. Cu astfel de probleme se ocupă o altă ramură a matematicii şi anume calculul variaţional.

Pentru calculul variaţional s-a dezvoltat un calcul infinitezimal propriu. În calculul diferenţial, operaţia fundamentală, diferenţierea, a fost notată cu litera d, care în alfabetul grec corespunde semnului de diferenţiere δ. Bazele acestui calcul au fost dezvoltate de un tînăr de 19 ani, *Lagrange*, într-o scrisoare adresată la 12 august 1755 lui *Euler*, motivarea calculului sprijinindu-se mai mult pe bunele rezultate obţinute, decît pe o demonstraţie strictă. *Euler* a redus calculul variaţional la calculul diferenţial şi a arătat prin aceasta că el nu duce la nici o contradicţie atîta timp cît calculul diferenţial este just. Justeţea calculului diferenţial însuşi a fost constatată cu mult mai tîrziu şi anume atunci cînd au putut să fie formulate în mod riguros de către *Cauchy* noţiunile de limită şi de trecere la limită. Calculul variaţional poate fi privit ca o continuare a calculului diferenţial. Înaintea sfîrşitului secolului nostru, i s-au dat acestui calcul formu-

lări şi mai generale, de care va trebui să ne ocupăm mai tîrziu.

Problema calculului variaţional poate fi privită ca o întrecere între domenii diferite care au frontiere echivalente, învingător fiind domeniul cu conţinutul cel mai mare.

Fig. 64.

După cum se ştie, integralele definite care stau la baza acestor consideraţii pot fi privite ca măsuri ale conţinuturilor (arii, volume etc.). Începutul acestei teorii a fost însă mai puţin formal, datorîndu-se unei întreceri între doi fraţi, adversari în domeniul matematicii, *Iakob* şi *Johann Bernoulli*. *Johann Bernoulli* l-a provocat public pe fratele său mai mare să determine linia reprezentată pe chenarul scrisorilor schimbate între *Leibniz* şi *Johann Bernoulli*, linie de-a lungul căreia un corp supus gravitaţiei ajunge în cel mai scurt timp dintr-un punct în al doilea punct (parabola nu satisface această condiţie), în cazul cînd corpul părăseşte primul punct cu o anumită viteză iniţială ; totul se petrece într-un plan vertical (fig. 64). *Jakob Bernoulli* a reuşit să rezolve problema, dezvoltînd cu această ocazie o metodă generală pentru rezolvarea problemelor asemănătoare. Soluţia lui *Johann Bernoulli*, plină de genialitate, era însă valabilă numai pentru acest caz.

Astfel s-au întîlnit aceste două aptitudini matematice : talentul de a cerceta sistematic, pe care l-a avut *Jakob Bernoulli*, şi capacitatea de descoperire creatoare a lui *Johann Bernoulli*. Şi în cazul cînd aceste două aptitudini ar fi fost întrunite în aceeaşi persoană, ceea ce se poate întîmpla în cazul celor mai mari cercetători ai naturii, ele s-ar fi combătut între ele, dar lupta ar fi rămas neştiută de lumea înconjurătoare, în timp ce, în cazul fraţilor *Bernoulli*, ea s-a exteriorizat într-un mod nefericit. *Johann Bernoulli* nu a avut dreptate, recunoscînd acest lucru abia după moartea fratelui său.

Calculul variaţional a condus unele probleme, ca aceea a conţinutului maxim descrisă mai înainte, spre anumite „ecuaţii diferenţiale" descoperite de *Euler*. În acest caz este vorba de ecuaţii care există între funcţiuni şi derivatele lor şi din care se determină funcţiunile necunoscute. Ne putem închipui că aceste determinări sau rezolvări întîmpină, în general, dificultăţi foarte mari, care nu au putut fi evitate în toate cazurile. Noi am mai întîlnit o ecuaţie diferenţială foarte simplă sub forma unei integrale nedefinite, în care se caută o funcţiune a cărei derivată este dată. Soluţia se obţinea prin integrare şi de aceea era evident că în fiecare caz s-a încercat obţinerea soluţiilor problemelor prin integrare. Această metodă reuşeşte însă numai pentru o parte din ecuaţiile diferenţiale. Condiţiile de mai sus amintesc ecuaţiile algebrice, din care relativ puţine se pot rezolva prin extragerea rădăcinilor, operaţie care, în cazul nostru, este corespunzătoare cu integrarea. Şi într-un caz şi în altul, teoria grupurilor este aceea care conduce la acest rezultat, dovedindu-se astfel din nou poziţia predominantă pe care o ocupă această teorie.

CALCULE CU MĂRIMI DIRIJATE

O altă aplicare a matematicilor superioare o găsim în acel capitol din geometrie de care ne vom ocupa mai jos. Pare recomandabil ca la început să ne ocupăm de cazurile mai simple. Prin utilizarea denumirii de „simplu" trebuie să facem o precizare care este în spiritul explicaţiilor noastre şi anume că raţionamentele complicate apar mai

uşor de înţeles cu cît cresc cunoştinţele, apărînd în cele din urmă evidente. Cît de mult se confirmă acest lucru în viaţa obişnuită se poate constata din raporturile dintre un elev şi un profesor. Profesorului îi sînt necesare numai cîteva puncte de reper pentru a reconstrui un raţionament de care nu îşi mai aminteşte ; elevului, spre deosebire de profesor, nu-i rămîne altceva de făcut decît să memoreze întreg raţionamentul. Se încearcă prin aceasta să se dea o explicaţie pentru concepţiile atît de diferite în ceea ce priveşte esenţialul unei probleme. Esenţialul poate fi foarte diferit, el însuşi fiind în raport cu cel care face aprecierea.

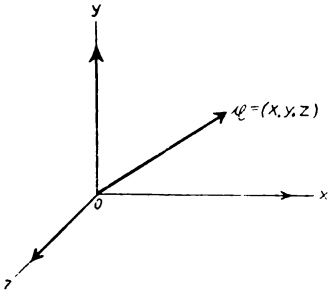


Fig. 65. — Pentru spaţiile cu 3 dimensiuni pentru x, y, z se notează x_1, x_2, x_3.

Să pornim de la n numere $x_1, x_2, \ldots, x_n$, care sînt legate de un „punct" determinat de coordonatele $x_1, x_2, \ldots, x_n$, aşa cum în geometria analitică se porneşte de la două sau trei numere. Acest punct determină, împreună cu originea sistemului de coordonate, o dreaptă, căreia i se dă şi un sens prin aceea că se cere ca dreapta să-şi aibă începutul în originea axelor (fig. 65). O astfel de dreaptă dirijată se numeşte vector ; se vorbeşte despre un vector $\vec{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avînd componentele $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Numerele $x_1, \ldots, x_n$ pot fi şi valori complexe, deci expresii de forma $a + bi$, în care caz $i = \sqrt{-1}$ reprezintă unitatea imaginară.

În mulţimea acestor vectori se definesc anumite legături de natura celor din teoria grupurilor şi care transformă totalitatea vectorilor într-un spaţiu linear. Aceasta se obţine dacă se introduce o adunare şi o înmulţire de vectori cu numere. Suma a doi vectori $\vec{x}$ şi $\vec{y}$ se înseamnă cu $\vec{x} + \vec{y}$, prin aceasta înţelegîndu-se vectorul de componente $x_1 + y_1$, $x_2 + y_2$, $\ldots$, $x_n + y_n$ (fig. 66). Înmulţirea

unui vector $\vec{x}$ cu un număr a are ca rezultat vectorul $a\vec{x} = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$.

Aci este vorba de ceva mai mult decît de un mod prescurtat de scriere. Această sintetizare a n numere în mărimi creează într-adevăr noţiuni noi, tot aşa după cum un

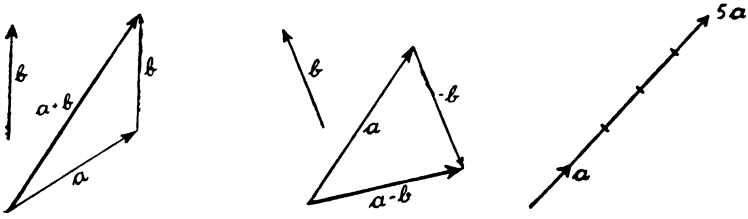


Fig. 66.

ceasornic reprezintă mai mult decît o reunire de rotiţe dinţate. Acum este vorba de a cerceta legile valabile în acest nou domeniu de mărimi. La fel ca şi în geometria analitică a spaţiului obişnuit tridimensional, există şi în spaţiul linear sistema de coordonate. De exemplu, vectorii

$$\vec{e}_1 = (1,0, \ldots, 0)$$
$$\vec{e}_2 = (0,1, \ldots, 0)$$
$$\vec{e}_n = (0,0, \ldots, 1)$$

formează un sistem de coordonate. Un vector oarecare se poate reprezenta ca sumă a acestor „vectori unitari"; deci:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$$

În continuare, trebuie cercetate acele transformări univoce ale spaţiului linear în el însuşi care transformă sume şi produse din nou în sume şi produse. Exprimarea în termeni matematici a acestei condiţii simple este de obicei destul de complicată, lucru care nu ne va deranja dacă ne gîndim că mintea noastră cuprinde în noţiunea foarte simplă de pădure varietatea mare a copacilor care

o compun. Dacă $\vec{x}$ este imaginea vectorului $\vec{x}$, atunci componentele lui $\vec{x}$ se calculează din componentele lui $\vec{x}$, cu ajutorul ecuațiilor următoare :

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$$
$$x'_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n$$
$$x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n.$$

Schema coeficienților care cuprinde totalitatea numerelor $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ în aceste formule se notează cu litera A și se numește „matrice". În acest caz este vorba din nou de sintetizare de numere, de această dată a n^2 numere, definindu-se astfel niște mărimi noi, anume matricele.

Cu matricele se poate calcula la fel ca și cu numerele obișnuite, dacă se stabilește ce trebuie să se înțeleagă prin adunarea și înmulțirea unor astfel de forme numerice. Înmulțirea constă dintr-o reprezentare repetată de două ori a spațiului linear asupra lui însuși, rezultatul final fiind produsul celor două matrice corespunzătoare fiecăreia din cele două reprezentări. Astfel este clar că elementele matricei rezultate se determină din elementele celor două matrice, calculul fiind ceva mai complicat, cu tot raționamentul simplu care stă la baza definiției noastre. Fiind vorba în acest caz numai de raționamente elementare, acestea fac ca după cîteva exerciții să dispară teama de formule complicate, avînd astfel posibilitatea de a putea recunoaște un sens simplu în spatele unor expresii complicate. Tocmai în acest fapt constă secretul matematicianului.

Dintr-o matrice se obține un număr obișnuit, un „determinant", în cazul cînd elementele matricei sînt prelucrate precum se indică mai jos. Se formează toate produsele posibile de n elemente, în așa fel încît să se ia la rînd cîte un element din rîndurile matricei astfel ca să nu rămînă nici o lacună. Acestor produse li se atribuie pe rînd semnul pozitiv sau negativ și după aceasta produsele se adună. În acest chip din matricea :

$$a_{11}\ a_{12}$$
$$a_{21}\ a_{22}$$

rezultă determinantul :

$$a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}.$$

Astfel sîntem în măsură să caracterizăm matricea care să reprezinte o generalizare a rotaţiei în plan şi în spaţiu a axelor de coordonate (fig. 67). Astfel de rotiri au un determinant de valoare absolută 1 şi se numesc „transformări ortogonale". Într-un sistem de coordonate, după rotire, componentele unui vector sau elementele unei matrice capătă valori noi, care trebuie calculate din cele iniţiale cu ajutorul matricei de rotaţie. Cu noile elemente rezultate, proprietăţile lor geometrice trebuie să fie exprimate în aceeaşi formă ca la cele iniţiale, deoarece proprietăţile sînt independente de sistemul de coordonate. Această constatare permite să se caracterizeze relaţii geometrice prin modul de comportare a vectorilor transformărilor algebrice. Pe noi ne interesează numai faptul că transformările ortogonale transformă o clasă anumită de matrice în aşa fel, încît numai diagonala care merge în jos de la stînga spre dreapta mai cuprinde elemente de valori diferite de zero, celelalte elemente ale matricei luînd valoarea zero.

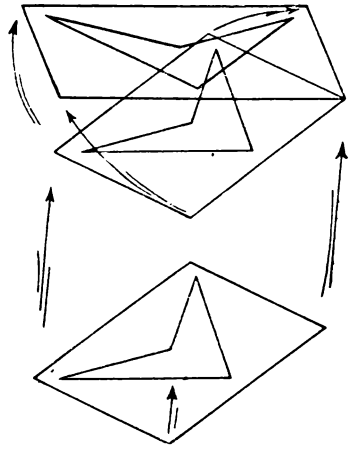


Fig. 67.

Astfel de matrice se numesc pe scurt „operatori", elementele rămase în diagonală, în cadrul transformării, numindu-se „valori proprii" ale operatorului. Între elementele unui operator există anumite relaţii. Ne amintim că numerele a_{kl} pot fi şi mărimi complexe, deci de forma $b_{kl} + i\, c_{kl}$. Prin numărul a^*_{kl} se înţelege „numărul complex conjugat" $b_{kl} - i\, c_{kl}$. În acest caz, pentru fiecare operator trebuie să fie îndeplinită condiţia $a_{kl} = a^*_{kl}$ aceasta însem-

nînd că elementele care sînt simetrice față de diagonală sînt complexe conjugate.

Această însușire specială a elementelor matricei iese în evidență în cadrul unei extinderi importante a noțiunii de lungime a unui vector, care se va dovedi hotărîtoare în transpunerea matricei spațiului ce ne preocupă. Prin lungimea unui vector $\vec{x}$ se înțelege valoarea pozitivă a expresiei :

$$\sqrt{\vec{x}_1\vec{x}_1 + \vec{x}_2\vec{x}_2 + \ldots + \vec{x}_n\vec{x}_n}$$

Expresia de sub radical ne îndeamnă să introducem „produsul interior" sau „scalar" $\vec{x}.\vec{y}$ sau $(\vec{x}, \vec{y})$ a doi vectori $\vec{x}$ și $\vec{y}$:

$$x_1y^* + x_2y_2^* + \ldots + x_ny^* .$$

Lungimea vectorului $\vec{x}$ se poate nota în acest caz cu $(\vec{x}, \vec{x})^{\frac{1}{2}}$. Dacă acum se formează $\vec{y}$ și $\vec{x}$ cu ajutorul matricei A, a unui operator, notînd $\vec{y} = A\vec{x}$, atunci avem $(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, A\vec{y})$.

În cursul acestor raționamente am stabilit că matricele sînt niște mărimi care pot fi adunate și înmulțite, astfel că denumirea de mărime este justificată. Aceste mărimi se numesc „tensori", o matrice denumindu-se mai exact un tensor de gradul doi. Vectorii sînt tensori de gradul întîi, în timp ce tensorii de grade superioare și „spinorii", care sînt mai generali, se definesc după criterii asemănătoare.

Nu este necesar să pătrundem mai departe în acest domeniu. Ne vom întoarce înapoi la matrice și vom stabili că pentru acestea regulile obișnuite de adunare și înmulțire sînt numai parțial valabile, nefiind indiferentă ordinea în care se iau factorii într-un produs. Am arătat în produsul a două matrice că cele două transformări pe care ele le reprezintă trebuie făcute succesiv, rezultatul final depinzînd, în general, de ordinea în care se fac transformările. Numai dacă în mod întîmplător nu este cazul,

ca, de exemplu, în figura 67, atunci factorii pot fi schimbaţi între ei şi atunci matricele se numesc comutative. Pentru cazul general trebuie abandonată utilizarea unei reguli, care rămîne valabilă pentru numerele obişnuite, avînd de această dată un motiv concret de a slăbi premisele acesteia. Deoarece această problemă am mai întîlnit-o în algebra modernă, nu ne vom ocupa mai departe de ea.

UN SPAŢIU CU INFINIT DE MULTE DIMENSIUNI

Aceste dezvoltări servesc ca puncte de orientare la conceperea unei noi geometrii, pe care a descoperit-o savantul *Hilbert*, din care cauză îi poartă şi numele. *Hilbert* a considerat şiruri infinite numărabile de numere ca puncte, în care valorile absolute ale fiecărui termen ridicat la pătrat formează o serie de sumă finită. În mod asemănător cu cazurile precedente, aceste puncte se pot aduna, înmulţi etc. Făcînd totuşi abstracţie de acest lucru, să dăm în locul acestui caz concret o formulare abstractă, care va permite deducerea altor rezultate importante. Cel mai surprinzător este faptul că noul spaţiu posedă infinit de multe dimensiuni, corespunzătoare coordonatelor infinit de multe ale fiecărui punct. Totuşi şi în acest spaţiu există sisteme de axe de coordonate obişnuite, faţă de care fiecare punct se poate reprezenta, tot aşa după cum în geometria analitică se reprezintă punctele spaţiului obişnuit sau după cum se reprezintă punctele în spaţiul cu n dimensiuni, cu deosebirea că, în acest caz, sistemele de coordonate nu mai sînt compuse dintr-un număr finit de mare, ci dintr-un număr infinit de mare de axe.

Deocamdată nu ne ocupăm de ceea ce înseamnă puncte ci punem condiţia ca ele să se poată aduna între ele şi să se poată înmulţi cu un număr după aceleaşi reguli care sînt valabile şi pentru vectorii cu n dimensiuni. Fiecărei perechi de puncte f, g îi corespunde un număr (f, g), care se comportă la fel ca un produs scalar şi este capabil să creeze o metrică a spaţiului lui *Hilbert*.

Pentru aceasta trebuie să definim lungimea lui f prin valoarea pozitivă a lui $(f, f)^{\frac{1}{2}}$ însemnînd-o cu $\| f \|$

şi să considerăm $||f - g||$ ca distanţa dintre punctele f, g. Faptul că natura punctelor nu a fost indicată necesită ipoteza suplimentară că punctele de acumulare (în a căror vecinătate oricît de apropiată există puncte ale spaţiului *Hilbert*) fac ele însăşi parte din spaţiu şi că există o infinitate numerabilă de puncte atît de densă în spaţiu încît, oricît de mică ar fi o porţiune din spaţiu, în ea se poate găsi un punct. Toate aceste condiţii sînt valabile şi pentru spaţiile considerate pînă în prezent, nu însă şi condiţia finală care se deduce şi anume că există un număr infinit de direcţii perpendiculare între ele. Aceasta se mai poate exprima în felul următor. Se spune că punctele f, g ... sînt linear independente între ele dacă suma $af + bg + \ldots$ (a şi b ... fiind numere) este numai atunci egală cu zero cînd toţi coeficienţii a, b, ... sînt egali cu zero în acelaşi timp. Această definiţie permite apoi formularea existenţei în spaţiul lui *Hilbert* a unui număr foarte mare de puncte linear independente între ele, în contrast cu spaţiul cu n dimensiuni, în care există numai un număr n de puncte linear independente între ele.

În spaţiul determinat prin aceste condiţii se pot introduce transformări care corespund matricelor şi în special operatorilor din spaţiul cu n dimensiuni. Se generalizează astfel noţiunea unei matrice, prin aceea că se introduc transformări lineare A, făcîndu-se astfel posibilă înlocuirea lui $A\ (af + bg)$ prin $aAf + bAg$. Dacă în afară de aceasta mai este valabilă şi relaţia $(Af, g) = (f, Ag)$, transformarea lineară se numeşte în acest caz un operator simetric. Prin analogie cu operatorii spaţiului cu n dimensiuni, se pot defini şi valori particulare care sînt toate reale; li se pot face de asemenea să corespundă fiecărei valori particulare cîte un număr pozitiv, care trebuie considerat ca probabilitatea apariţiei valorii particulare respective. Noi trebuie să ne mulţumim cu aceste indicaţii, deoarece efectuarea operaţiilor ar necesita dezvoltări care numai ele singure ar necesita un tratat special.

Prin aceasta am construit o geometrie abstractă, în care nu s-a fixat natura punctelor. Acestea pot fi interpretate ca şiruri de numere, aşa cum au apărut mai întîi în cercetările lui *Hilbert*, sau ca anumite funcţiuni. Interpretarea a doua este de foarte mare importanţă şi din

această cauză vom mai face anumite adăugiri în acest sens.

La început am considerat o integrală definită ca reprezentînd conținutul unor figuri, dar mai tîrziu s-a luat în considerare extinderea noțiunii de conținut. Pentru definirea integralelor definite a trebuit să se folosească noțiunea extinsă de conținut, așa cum a făcut-o pentru prima oară *Lebesgue*. Funcțiunile integrabile în sensul lui *Lebesgue* se numesc funcțiuni sumabile, iar funcțiunile limită ale șirurilor de funcțiuni sumabile se numesc măsurabile. Astfel de funcțiuni măsurabile, care, ridicate la pătrat, sînt sumabile, pot fi considerate ca puncte ale unui spațiu *Hilbert*. Pentru ele se definesc sumă și produs, efectuarea operațiunilor corespunzătoare asupra funcțiunilor însele, considerîndu-se însă produsul scalar al funcțiunilor f și g ca integrală de fg. Se poate dovedi că aceste definiții satisfac toate condițiile inițiale, astfel că avem într-adevăr de-a face cu un spațiu *Hilbert* propriu-zis.

Foloasele unei construcții abstracte se exteriorizează în acest caz prin aceea că propozițiunilor obținute le corespund o interpretare reală imediată, sau, cu alte cuvinte, aceste propoziții se interpretează prin funcțiuni și integralele lor. Datorită metodelor lui *Neumann* se obțin cunoștințe care, altfel, s-ar fi obținut numai cu multă dificultate sau pe căi ocolite, prin aceasta justificîndu-se întru totul formularea lor abstractă.

REGULILE HAZARDULUI

Există oare reguli ale hazardului? Nu ignoră acesta, mai curînd, orice regulă? Uneori capeți această impresie, dar ea este înșelătoare, astăzi existînd o teorie care dezvoltă reguli după care trebuie să se comporte pînă și hazardul și după care chiar se și comportă. Știm cît de mult datorează această teorie pasiunii pentru jocurile de noroc.

Dorința creării unui sistem de joc care să asigure un cîștig sigur se poate îndeplini numai în cazurile cele mai simple și atunci fără ajutorul nici unui calcul de probabilitate. Să jucăm cu o monedă cunoscutul joc cap sau pajură, unde cîștigătorul primește miza dublă. Să considerăm

că unul din jucători mizează o marcă pe pajură. Cîştigînd, primeşte două mărci şi cîştigul lui este de o marcă. Dacă dimpotrivă el pierde, atunci dublează miza la două mărci. Dacă iese pajura, atunci primeşte patru mărci, faţă de trei mărci pe care le mizase pînă atunci. Cîştigul este deci iarăşi o marcă. Dacă pierde şi a doua oară, dublează din nou miza, continuînd aşa mai departe pînă iese pajura. La sfîrşitul unei astfel de serii el cîştigă mereu numai o marcă, cu condiţia să nu întrerupă jocul. Aceasta este însă dificultatea, deoarece dacă iese capul de 20 de ori în şir, miza următoare se va ridica la 1 048 576 mărci. Făcînd abstracţie de faptul că o astfel de sumă s-ar putea întrebuinţa în altă parte în mod mai raţional, ar fi posibil ca în cursul jocului să iasă de o sută, ba chiar de o mie de ori sau şi mai des numai capul. Desigur că în realitate acest lucru nu se întîmplă niciodată, şi numai aşa putem vorbi de un sistem sigur de joc.

Problema calculului probabilităţilor este cu totul alta.[1] Acest calcul porneşte de la probabilităţi simple, obţinînd apoi din acestea probabilităţi mai complicate. Am ajuns la noţiunea fundamentală a întregii teorii, punîndu-ne întrebarea : ce este probabilitatea ? Fiind în posesia noţiunilor de şir şi limită, răspunsul este uşor de dat. Dacă am arunca zarurile şi am nota numerele care ies la fiecare aruncare, atunci am obţine o serie de numere care poate fi continuată la nesfîrşit. Vor apare numerele de la 1 la 6, fiecare din acestea putînd fi un indiciu, în timp ce fiecare aruncare de zaruri ar putea fi numită eveniment. Să considerăm deci un şir infinit de evenimente avînd diferiţi indici. Se poate număra apoi frecvenţa apariţiei unui indice anumit între primele n evenimente sau, altfel exprimat, între primii n termeni ai şirului. Acest număr îl însemnăm cu H_n (litera iniţială a cuvîntului Häufigkeit = frecvenţă) şi formăm raportul $\frac{H_n}{n}$. Dacă pentru n, care tinde spre infinit, acest raport se apropie de o limită,

[1] Contribuţii esenţiale la dezvoltarea actuală a calculului probabilităţilor au adus A. A. Markov (tatăl) în 1910 — 1915 (prin teoria probabilităţilor fenomenelor legate în lanţ, esenţială pentru problemele automatizării) şi A. N. Kolmogorov, care 1931, a axiomatizat calculul probabilităţilor dîndu-i rigoarea caracteristică oricărei ramuri a matematicilor *(N. R.)*

aceasta va fi cuprinsă între 0 şi 1 şi se numeşte probabilitatea indiciului considerat. Dacă se alege drept indiciu unul din cele 6 numere ale zarului, atunci probabilitatea lui de a ieşi este 1 : 6. Prin aceasta se epuizează pentru matematicieni problema jocului cu zaruri.

Înainte, probabilitatea se definea altfel. La aruncarea zarului se deosebeau cazuri posibile şi cazuri favorabile pentru diferitele numere de zar, corespunzînd la 6 cazuri posibile, în comparaţie cu un singur caz favorabil pentru fiecare număr din zar. Cu aceasta se obţin aceleaşi valori şi pentru probabilităţi. Acestui raţionament i se reproşa că în majoritatea aplicaţiilor calculului probabilităţilor nu există reguli precise pentru a putea indica dinainte cazurile posibile şi cele favorabile. Acest lucru este adevărat, însă noua definiţie prezintă dificultatea acceptării şirurilor. În ambele cazuri trebuie să se formuleze o problemă matematică legată de viaţa practică, însă insuficient conturată. Numai neluarea în consideraţie a acestui adevăr a putut să facă să se reproşeze definiţiei mai vechi faptul că provoacă un cerc vicios prin introducerea cazurilor favorabile. Formulările calculului probabilităţilor trebuie considerate ca o schemă care se completează de la caz la caz în baza experienţei, dînd astfel posibilitatea de a fi utilizată.

Din definiţia probabilităţii ca limită rezultă imediat că nici probabilitatea 1 nu dă vreo siguranţă în sensul obişnuit, iar probabilitatea 0 nu prezintă nici ea vreo garanţie că nu se va produce un eveniment. Pentru a înţelege prima afirmaţie, să alegem un şir de evenimente favorabile, cu excepţia acelora de pe locul 2, 4, 8 ... Limita şi totodată probabilitatea este în acest caz 1, cu toate că şirul de evenimente favorabile se întrerupe periodic. În mod asemănător se poate înţelege şi o a doua afirmaţie. În contrast cu logica clasică, calculul probabilităţilor nu este nici absolut afirmativ, nici absolut negativ. Să fie oare vorba de o legătură între calculul probabilităţilor şi logica vieţii?

O urmare cu mult mai importantă a faptului de a fi definit probabilitatea ca o limită o formează recunoaşterea că utilizarea acesteia în practică se poate face numai în baza unei noi presupuneri. Trebuie să ne mulţumim cu

faptul de a ne orienta în baza unui număr mai mare de întîmplări. Cîteva aruncări de zaruri ar trebui să fie suficiente pentru a decide dacă un zar este îngreunat pe o față sau nu, însă luat în mod strict aceasta formează o ipoteză dată și întotdeauna confirmată de experiență. Nici o lege a calculului probabilităților nu poate modifica această situație, nici chiar așa-numita „lege a numerelor mari" căreia în trecut i se acorda o mare importanță și care are acum o vîrstă respectabilă de peste 200 de ani. Această lege, întemeiată de *Jakob Bernoulli* și denumită uneori după numele său, a fost publicată în anul 1713, după moartea sa, în lucrarea „Ars conjectandi".

Cum se determină probabilitatea de a ieși un număr par la aruncarea zarului? Ne referim la definiția dată mai înainte și observăm că de această dată aruncările de zar 2, 4 și 6 formează împreună numărul H_n, iar limita lui $H_n : n$ rezultă că este $1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$. Deoarece aceste valori se pot aduna, legea se numește „legea de adunare a probabilităților". Prin această lege avem un exemplu simplu asupra procedeului de urmat în calculul probabilităților și vom rămîne la acesta.

Trebuie să revenim încă asupra a două definiții, pentru că acestea sînt de mare importanță în fizică. Este vorba de valoarea medie și de gradul de împrăștiere a rezultatelor măsurătorilor pe care le vom nota cu x_1 pînă la x_n și care, în baza frecvenței apariției lor, posedă anumite probabilități ω_1 pînă la ω_n. Atunci se definește valoarea medie μ ca suma :

$$x_1 \omega_1 + \ldots + x_n \omega_n,$$

gradul de împrăștiere corespunzător fiind :

$$(x_1 - \mu)^2 \omega_1 + \ldots + (x_n - \mu)^2 \omega_n.$$

Toate aceste rezultate își găsesc utilizarea în fizica modernă, care nu poate fi concepută fără ele. Prin aceasta se combate cu hotărîre părerea că matematica este îndepărtată de realitate. Evoluția ei, descrisă mai sus, explică de asemenea de ce nu se poate ține pas cu posibilitățile intuitive ale matematicienilor și se poate trage concluzia că un matematician raționează la fel ca și noi, dar, firește, cu o ușurință pe care i-o dau anii de practică.

Pentru cercetător natura este o carte deschisă. Din păcate, pentru diferiți cercetători ea este deschisă în locuri diferite.

Fizica, în cursul evoluției ei, se deosebește în mod simțitor de știința care va deveni mai tîrziu. În cele arătate pînă acum am ținut seama de această evoluție, în timp ce de aci înainte, pentru a căpăta o privire mai în adîncime și mai completă asupra fizicii, ne vom ocupa mai mult de știință în sine. Pînă acum am analizat diferite raționamente din domeniul fizicii, privite din punctul de vedere al modului cum se poate ajunge la ele pe un drum normal. La început ne-am pus problema ca, în funcție de unele experiențe izolate, să stabilim noțiuni a căror sferă să o extindem apoi treptat. Acum, dimpotrivă, vom folosi de la început, pe cît posibil, noțiuni generalizate. În acest caz se poate întîmpla ca legătura cu realitatea să se facă ulterior. Această legătură sprijină apoi teoriile care au fost elaborate, confirmîndu-le retroactiv. Deci acum vom trata fizica în mod sistematic, spre deosebire de procedeul inductiv folosit pînă în prezent.

Fără îndoială că evoluția istorică a unei științe a pășit întotdeauna pe calea inductivă. Raționamentele folosite de noi s-au deosebit adesea mult de cele folosite în alte epoci pentru obținerea rezultatelor respective. Și aceasta pe bună dreptate, deoarece în cursul evoluției istorice a științelor s-a mers și pe căi greșite sau ocolite, la fel ca în cazul construcției unui oraș în decurs de mai multe secole. În probleme de urbanistică, arhitecții care se succedau aveau planuri care nu concordau și din această cauză orașele nu au căpătat o înfățișare unitară. Poate că rezultatul final să producă un efect pitoresc, dar a locui într-un astfel de oraș nu-ți poate face plăcere. Și în plus rămîne de văzut dacă atributul de „pitoresc" înseamnă întotdeauna și „frumos". Dacă s-ar porni la reconstrucția unui astfel de oraș, atunci cu siguranță că s-ar sacrifica multe din concepțiile vechi.

În astfel de cazuri nu se poate rămînea pe loc, deoarece nu este suficient să se înlăture accesoriile inutile, ci trebuie găsite soluţii noi. Orice critică mai adîncă este fructuoasă şi aceasta se constată prin rezistenţele de care se loveşte critica făcută. Atunci cînd vechile deprinderi de a gîndi sînt ameninţate, se cere un nou fel de a privi lucrurile, care la început provoacă nesiguranţă. Contemporanii se opun la schimbări de acest fel şi această opoziţie poate creşte pînă la batjocură, care se produce întotdeauna atunci cînd schimbările nu sînt bazate pe motive reale. În această privinţă să auzim ce spune din propria sa experienţă *Ernst Mach*, după ce încercase zadarnic să se impună cu o critică : „Astfel, *E. Neumann* a adus de curînd în discuţie această temă în teoria susţinută de el, găsindu-se exact aceleaşi neprecizii, aceleaşi dificultăţi şi acelaşi paradox. Dar pe cît mi-a părut de rău, pe de o parte, de a fi pierdut întîietatea într-o problemă atît de importantă, pe atît conflictul cu un matematician de talia lui m-a bucurat şi m-a despăgubit cu prisosinţă pentru dispreţul şi lipsa de înţelegere pe care mi le-au arătat aproape toţi fizicienii cu ocazia discutării acestei probleme".

Critica despre care este vorba se referă la legea inerţiei şi trebuia să explice dificultăţile care sînt cuprinse în noţiunea de spaţiu absolut. *Mach* s-a ferit să-şi publice părerile în această problemă, deoarece nu reuşise mai înainte cu alte păreri mai simple. Să-l ascultăm pe el însuşi în această privinţă : „Cu această ocazie poate că trebuie să amintesc că am încercat să mă orientez asupra noţiunii de masă cu ajutorul principiului imposibilităţii existenţei unui „perpetuum mobile". Notiţa mea referitoare la această problemă, care mi-a fost înapoiată ca nefolositoare de domnul *Poggendorff* după ce stătuse la el aproape un an de zile, a apărut mai tîrziu în volumul IV din *Repertoriul lui Carl*. Această respingere este şi motivul pentru care nu am publicat cercetările mele asupra legii inerţiei. Dacă nu am reuşit în cazul unei probleme atît de simple şi de clare, ce-aş fi avut de aşteptat în cazul unei probleme mai dificile ? Analele[1] conţin deseori pagini întregi cu con-

[1] Revista „Analele de fizică" (N. R.)

cluzii greşite asupra teoremei lui *Torricelli* şi a aurorei, bineînţeles scrise în „limbajul fizicienilor". Evident că Analele ar scădea însă foarte mult în ochii publicului cititor dacă ar conţine o dată şi vreo scurtă notiţă care ar devia puţin de la limbajul lor special".

Cînd *Mach* a fost refuzat de profesorul *Poggendorff* de la facultatea din Berlin, editorul revistei „Analele de fizică", *Mach* era încă de atunci un fizician renumit. Dacă refuzul a putut totuşi să se producă, aceasta se datora faptului că *Poggendorff* nu era în stare să înţeleagă raţionamentele lui *Mach*. Dacă *Poggendorff* ar fi voit să le priceapă, ar fi trebuit să renunţe la multe lucruri învăţate anterior. Se înţelege că nu-i de loc uşor cuiva să renunţe la cele învăţate greu înainte şi să le înlocuiască cu ceva nou, pe care tot atît de greu va trebui să le înveţe, mai ales atunci cînd lucrurile vechi şi cele noi înseamnă pentru el numai studiu şi nu o necesitate a lărgirii cunoştinţelor. La apariţia unei generaţii noi, aceasta nu mai are nevoie să se dezveţe de lucrurile vechi, depăşite, fiind deci aptă pentru lucruri noi. Iar noua generaţie se miră, dar fără să aibă dreptate, de faptul că predecesorii ei nu şi-au însuşit imediat noile cunoştinţe.

Noua generaţie se miră cu atît mai mult cu cît adesea lucrurile noi au fost respinse în momentul în care rezultatele erau la îndemînă, aşa cum a fost cazul cu cercetările lui *Hittorf*. *Hittorf* a descoperit razele catodice, devenind prin aceasta un pionier în domeniul cunoaşterii structurii atomilor. El a ajuns la această descoperire studiind fenomenele care se produc la descărcările electrice în gaze rarefiate. Fenomenele de un colorit minunat, surprinzătoare prin variaţia formelor lor, erau cunoscute, nu însă şi cercetate. Din acest fenomen complex, *Hittorf* a izolat un anumit domeniu, a cărui cercetare l-a condus la cunoaşterea razelor catodice, formate din electronii ce se mişcă liber în spaţiu.

S-ar crede că merite atît de mari trebuiau să găsească imediat răsunet printre savanţii de specialitate. O părere complet greşită. Un savant de frunte şi anume profesorul *Felix Klein* de la Göttingen, decedat în anul 1925, scrie într-una din lucrările sale cele mai importante : „Întîmplător îmi amintesc de refuzul pe care l-a căpătat la Berlin *Hittorf* cînd, mai tîrziu, a prezentat descoperirea sa minu-

nată cu privire la razele catodice în faţa fizicienilor din Berlin ca *Magnus, Poggendorff* şi alţi savanţi". Totuşi, *Hittorf* a mai apucat la vîrsta de 90 de ani o recunoaştere tîrzie a descoperirilor sale.

Cazurile de care am vorbit mai sus arată cît de greu este pentru majoritatea oamenilor să înţeleagă concepţiile noi ; din păcate, nici fizicienii nu fac o excepţie în această privinţă. Din această cauză se înţelege de ce primele încercări de a întemeia o ştiinţă nouă nu au niciodată de la început un succes deplin, chiar dacă sînt făcute de minţile cele mai luminate. Astfel, opera lui *Euclid* este minunată, totuşi susceptibilă de completări. Terminarea unei creaţii poate cîteodată să dureze secole, chiar şi mii de ani. Şi într-adevăr, abia *Hilbert* a putut crea o lucrare care poate fi considerată completă, şi anume „Bazele geometriei". Aceasta i-a reuşit lui *Hilbert* cu ajutorul aşa-numitei metode axiomatice, metodă care este de asemenea tipică şi în mecanică.

Conform acestei metode se porneşte de la ipoteza că există noţiuni fundamentale care nu mai necesită nici o explicare şi la care se pot reduce celelalte noţiuni. Cum trebuie însă introduse în ştiinţă aceste noţiuni fundamentale ? Procedeul este simplu : se enumeră aceste noţiuni, care apoi sînt aşezate în fruntea edificiului de raţionamente, obţinîndu-se în felul acesta o serie de adevăruri fundamentale, axiomele. Se pune întrebarea cît de necesare sînt aceste axiome şi în ce măsură sînt susceptibile de modificări. În geometria euclidiană baza acesteia o constituie afirmaţia că dintr-un punct se poate duce într-un plan numai o singură paralelă la o dreaptă dată. După două mii de ani, *J. Bolyai, Gauss* şi *Lobacevski* au descoperit, independent unul de altul, că această axiomă a lui *Euclid* este susceptibilă de modificări. Se poate construi o altă geometrie, în care dintr-un punct se pot duce la o dreaptă o infinitate de drepte paralele, drepte care nu au nici un punct comun cu dreapta dată. Dacă această ipoteză se introduce ca o nouă axiomă în locul axiomei dreptelor paralele a lui *Euclid*, se obţine o nouă geometrie, cea neeuclidiană. De demonstrat nu se poate demonstra nici una din cele două axiome. Geometria lui *Euclid* nu este mai „valabilă" decît geometria nouă ; din punct de vedere

matematic, ambele sînt consecvente logice şi egal îndreptăţite.

Pentru a ataca sistematic problema posibilităţii de modificare a noutăţilor fundamentale, să admitem că noţiunile nu sînt legate de obiecte, ci sînt abstracte. Este posibil ca ele să permită interpretări diferite. Este de asemenea posibil ca printr-o nouă interpretare să se realizeze o mai bună sintetizare. Astfel, *Hilbert* a reuşit să găsească pentru teoremele din geometrie o anumită interpretare în domeniul numerelor, interpretare care i-a furnizat explicaţii importante asupra capacităţii de modificare a noţiunilor fundamentale din geometrie. Un alt exemplu care se referă la cele spuse anterior îl formează geometria analitică. Cu ajutorul acesteia, o dreaptă poate fi considerată ca o ecuaţie liniară, punctul de intersecţie a două drepte ca o soluţie comună a două ecuaţii liniare (fig. 68) ş.a.m.d.

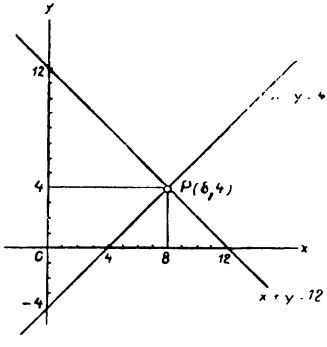


Fig. 68.

Posibilitatea de a interpreta în mod diferit noţiunile duce la un efort mai mic în gîndire, deoarece ea arată că raţionamentele fundamentale trebuie făcute numai o singură dată. Aceasta se realizează cu ajutorul unor noţiuni generale, pentru ca apoi rezultatele să se interpreteze într-un fel sau altul. În plus, se constată că rezultatele concrete sînt cîteodată mai greu de înţeles decît cele obţinute cu ajutorul noţiunilor generale. Motivul pentru această situaţie poate fi sau formal, sau o consecinţă a modului nostru de gîndire. Motivul este (1) formal dacă, datorită unui sistem de notare ales convenabil, cum este cazul calculului infinitezimal, se izbuteşte să se rezolve probleme grele fără nici o dificultate sau (2) este datorit modului nostru de gîndire, din experienţă ştiindu-se că se trag mai uşor concluzii dacă se rămîne în cadrul deprinderilor proprii de a gîndi. Contrar cunoscutei maxime a lui *Euclid*, în ambele cazuri se merge pe un drum urmat numai de marii gînditori. Dacă voim, cazul formal se poate subordona obiceiurilor de gîndire,

deoarece denumirile clare sînt evidente şi prin aceasta devin curente ; cazul formal este totuşi destul de important pentru a fi considerat ca un caz particular. În cele expuse mai sus rămîne însă importantă poziţia la care ne conduc aceste consideraţii.

Dacă ne întoarcem înapoi la fizică şi la structura axiomatică a acesteia, trebuie să ne aşteptăm mai întîi ca noţiunile de timp, sistem inerţial, forţe şi relaţiile lor reciproce să fie puse pe primul plan, pentru ca, pe de o parte, să se construiască edificiul mecanicii pe baza lor, iar, pe de altă parte, să se facă corelaţia cu percepţiile obişnuite din lumea noastră. Pentru a stabili în ce măsură noţiunile indicate, care fără îndoială sînt cele mai apropiate, reprezintă adevărate noţiuni fundamentale, este necesară o analiză mai amănunţită. Se constată că primele două din acestea şi anume timpul şi sistemul inerţial sînt într-adevăr capabile de a fi explicate mai îndeaproape.

Pentru a explica timpul trebuie să recurgem la corespondenţele biunivoce. După cum ne amintim, ele reprezintă două mulţimi în aşa fel legate între ele, încît fiecărui element dintr-o mulţime îi corespunde numai un element din cealaltă mulţime. Corespondenţa biunivocă o putem asemui cu două grupe de dansatori de la o şcoală de dans unde o grupă este formată din bărbaţi şi alta din femei, astfel încît fiecărui dansator dintr-o grupă îi corespunde o dansatoare din cealaltă grupă. Pentru cazul nostru se consideră în special corespondenţa biunivocă între două curbe. În timp ce secundarul unui ceasornic descrie un arc de cerc, un ascensor dintr-o clădire urcă de la etajul întîi la etajul al treilea. Fiecărei poziţii a secundarului îi corespunde o poziţie a ascensorului între etajul întîi şi trei. În felul acesta, un arc de cerc de pe ceasornic şi distanţa între cele două etaje devin biunivoce şi sînt într-o corespondenţă permanentă. La fel, o persoană căreia doctorul i-a prescris mişcare urcă între timp pe scări un etaj. Între drumul parcurs cu răsuflarea tăiată de această persoană şi arcul de cerc descris de secundarul ceasornicului există o corespondenţă biunivocă şi permanentă. Expresia acestei corespondenţe o numim timp, mai bine spus un interval de timp.

Hotărîtor în această privinţă este stabilirea punctelor care sînt legate între ele prin corespondenţă. Această coor-

donare depinde de observator. Observatorul este acela care constată corespondența ca timp, problema rămînînd la început deschisă dacă observatorii diferiți indică aceeași corespondență, adică dacă constată același interval de timp. În această privință mecanica clasică răspunde afirmativ, iar teoria relativității negativ, amîndouă fiind științe valabile. În orice caz, mecanica clasică reprezintă numai o aproximație, deși perfectă. Spre deosebire de teoria relativității, mecanica clasică se poate aplica numai pentru viteze reduse, prin cuvîntul „redus" înțelegîndu-se „cum grano salis", deoarece mecanica clasică mai este valabilă și în cazul vitezei celui mai rapid avion sau a celui mai rapid proiectil.

Conform explicației noastre, timpul constatat de un observator se compune din corespondențe care leagă între ele acele puncte care, după vorbirea obișnuită, se produc simultan. Cînd citim timpul după un ceasornic, indicăm ora, minutul și secunda. Acest lucru este oarecum complicat și se datorește faptului că ceasornicul are trei arătătoare. Dacă ar avea un singur arătător, atunci cadranul ar trebui împărțit în porțiuni foarte mici. Mecanismul ceasornicului înlătură acest inconvenient, astfel că, în ultimă instanță, indicarea timpului se reduce la indicarea poziției unui punct pe un cerc. Și dacă în această clipă se spune că o persoană despre care vorbeam coteşte după un colț al străzii, aceasta înseamnă că locul pe cercul ce indică timpul corespunde colțului de stradă în care se găsește acea persoană, firește în cazul că persoana în cauză acceptă să fie considerată ca un punct. Astfel se definește, în practică, noțiunea noastră de timp.

În această privință mecanica clasică recunoaște că toți observatorii folosesc aceeași corespondență: pentru toți observatorii timpul este același. Deci s-ar putea spune că există un timp absolut. Deocamdată noi să ne menținem la acest punct de vedere.

La sfîrșit să mai facem o observație care privește pe teologi. Conform expunerii noastre, timpul presupune mișcare și, implicit, existența materiei. Deci dacă dumnezeu a creat lumea din nimic, atunci nu are sens să spunem că el este veșnic, deoarece în lipsa materiei, ceea ce corespunde la nimic, nu se poate vorbi despre timp și durată, despre trecător sau etern.

Chiar dacă pentru orice observator timpul este același, observatori diferiți vor percepe celelalte fenomene în mod cu totul diferit, deoarece nu este indiferent dacă cineva privește lumea înconjurătoare dintr-o trăsură care merge sau dintr-una care stă pe loc. Există totuși un șir întreg de observatori care percep exact în același fel orice mișcare, care deci trebuie să fie determinați. *Newton* a fost de părere că aceasta se poate face numai cu ajutorul spațiului absolut. Mai tîrziu, din motive pe care le-am cunoscut în cadrul călătoriei noastre în istoria fizicii, acest lucru a fost considerat ca nesatisfăcător pînă în prezent, neajungîndu-se încă la o clarificare a problemei. Această clarificare se obține numai atunci cînd se ia în considerație legea atracției universale. Să nu facem obiecția că această lege nu face parte din legile fundamentale. Nimic nu se întîmplă pe lume fără influența acestei legi, fapt care justifică introducerea ei chiar la începutul acestei lucrări.

Pentru a formula legea atracției universale este necesară noțiunea de masă. Ea formează caracteristica oricărui corp și în mecanica clasică masa nu este influențată de mișcarea corpului. Legea atracției universale pentru două mase m și M, aflate la o distanță r una de cealaltă, are într-un sistem inerțial forma :

$$\frac{m\,M}{r^2}$$

Această expresie caracterizează sistemele inerțiale.

Pentru început nu se precizează dacă toți observatorii se găsesc în sistemul inerțial sau dacă există poziții care nu sînt sisteme inerțiale. Hotărîrea se poate lua numai în baza legii de mișcare, care ocupă al doilea loc între axiomele lui *Newton*. Aceste axiome sînt următoarele :

1. Orice corp își menține starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă, dacă nu este silit de forțe exterioare să-și schimbe starea în care se găsește.

2. Variația mișcării este proporțională cu efectul forței de mișcare și se produce în direcția dreptei în care se exercită forța respectivă.

3. Acțiunea este întotdeauna egală cu reacțiunea sau acțiunile reciproce a două corpuri sînt întotdeauna egale și de sens contrar.

Pentru aceste axiome sînt necesare anumite lămuriri.

Forța se numără între noțiunile fundamentale și a doua axiomă, numită și legea mișcării, stabilește legătura dintre forța $\vec{F}$, accelerația $\vec{a}$, și masa m; ea este

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Această egalitate trebuie considerată ca o schemă formulată de mecanică și completată de fizică prin indicarea forțelor. Această ecuație nu definește forța, ci arată numai că ea este egală cu produsul dintre masă și accelerație. Asupra acestei probleme s-a risipit multă cerneală fără rost, deoarece ea nu a fost înțeleasă.

Legea mișcării corpurilor conține prima axiomă a lui *Newton*, lege al cărei cuprins se datorește lui *Galileu* și care se numește de obicei legea inerției, ca un caz particular în care accelerația este nulă. În schimb, cea de-a treia axiomă nu are importanță pentru mecanică. A treia axiomă s-a născut în baza observației că întotdeauna există o egalitate între acțiune și reacțiune. În conformitate cu explicațiile referitoare la legea de mișcare a corpurilor, această axiomă nu constituie o afirmație din domeniile mecanicii, ci mai curînd din domeniul fizicii și în realitate ecuațiile generale din mecanică se pot obține fără ajutorul ei. Aceste ecuații conțin tot ceea ce poate afirma mecanica clasică.

Mărimile ce apar în axiome, ca viteză și accelerație, pot fi explicate mai îndeaproape cu ajutorul calculului diferențial. Dacă un punct material se mișcă, atunci coordonatele sale într-un sistem de observație sînt funcții de timp. Derivata întîi a acestor funcții determină viteza în raport cu timpul, iar derivata a doua determină accelerația. Deci atît viteza cît și accelerația sînt mărimi derivate.

Dacă se calculează accelerațiile aceluiași punct material în două sisteme de referință care se mișcă în sensuri contrarii unul față de celălalt, se constată că aceste accelerații sînt egale numai atunci cînd cele două sisteme se mișcă uniform unul față de celălalt, așa cum rezultă în mod indirect din ecuațiile de transformare ale lui *Galileu*, pe care le-am mai

întîlnit în cadrul călătoriei noastre în trecutul fizicii. Din această cauză există observatori care cu siguranţă că nu se află în sisteme inerţiale. Cînd un observator se găseşte în căluşeii din iarmaroc, el constată alte acceleraţii decît un observator care stă pe loc şi care, conform legii mişcării, constată şi alte forţe. Rezultă deci că atracţia poate avea valoarea rezultată din formula dată mai sus numai pentru unul dintre cei doi observatori. Acest lucru se exprimă prin aceea că un observator care nu se află într-un sistem inerţial constată acţiunea unor forţe aparente care se calculează pe baza mişcării relative a sistemului său faţă de sistemul inerţial. Pentru aceste cazuri formulele au fost date de *Coriolis*, după numele căruia forţele aparente au fost numite forţele lui *Coriolis*.

Dacă ar exista un spaţiu absolut în sensul lui *Newton*, atunci în momentul în care bolta cerească ar începe să se rotească, asupra locuitorilor acestui spaţiu nu ar trebui să lucreze forţe aparente. Această concluzie a fost încă de mult considerată drept îndoielnică şi a fost supusă în anul 1896 unei experienţe critice. În cadrul acestei experienţe bolta cerească a fost înlocuită printr-un volant mare, verificîndu-se dacă la rotirea acestuia iau naştere forţe în apropierea lui. Într-adevăr, experienţa a avut un rezultat negativ şi părea să-i dea dreptate lui *Newton*. Totuşi, rezultatul negativ poate să se datoreze faptului că efectul produs era prea mic pentru a putea fi măsurat. În lumina concepţiilor susţinute în această lucrare este clar că nişte mase care gravitează determină sisteme inerţiale; prin urmare, observatorul aflat în stare de repaus la începerea rotaţiei nu se mai găseşte într-un sistem inerţial, deci constată forţe aparente. Cu această concluzie se părăseşte mecanica clasică şi se trece într-un domeniu care face parte din teoria relativităţii generalizate, asupra căreia vom reveni mai tîrziu.

Forţele aparente nu sînt de loc atît de puţin reale pe cît le arată numele şi nici nu sînt misterioase. Asupra locuitorilor pămîntului se exercită în permanenţă forţe aparente, care sînt o urmare a mişcării de rotaţie a pămîntului şi care din motive de calcul se descompun în două forţe componente. Prima nu este altceva decît obişnuita forţă centrifugă. După cum un automobil şi pasagerii lui sînt împinşi în afară la o curbă, tot aşa asupra fiecărui punct de pe globul pămîn-

tesc, care se învîrteşte neîncetat în jurul axei sale ca un căluşel, se exercită o forţă centrifugă care-l trage în afară. Mărimea şi direcţia acestei forţe depind de locul în care este situat punctul ales pe suprafaţa pămîntului. La poli, forţa centrifugă este, evident, zero, iar la ecuator atinge valoarea maximă, deoarece punctele de la ecuator au distanţa cea mai mare faţă de axa globului pămîntesc şi, prin urmare, trebuie să se mişte cu viteza cea mai mare.

Fig. 69.

Ca orice forţă, şi forţa centrifugă este o mărime dirijată, un vector care este supus regulilor calculului vectorial. Orice vector poate fi descompus în doi vectori componenţi, dirijaţi după direcţii date. În cazul nostru este indicată următoarea descompunere a forţei centrifuge. O componentă trebuie să fie dirijată pe direcţia forţei de gravitaţie, deci pe direcţia razei pămîntului, dar fiind vorba de o forţă centrifugă îndreptată de la centrul pămîntului în afară, ea va tinde în acel loc să micşoreze întrucîtva forţa gravitaţională. Micşorarea este mică, însă măsurabilă. Cea de-a doua componentă este dirijată în direcţia nord-sud, de-a lungul tangentei la meridianul din acel loc. Ea este îndreptată de la pol spre ecuator şi dacă intensitatea ei nu ar fi compensată de influenţa mai puternică a vîntului şi a curenţilor oceanici, atunci un gheţar ar fi împins de la pol spre ecuator. Este posibil ca această forţă să se exercite însă într-o măsură cu mult mai puternică; după cele mai noi păreri ale geologilor, continentele sînt formate din mase enorme de roci care ar putea fi împinse încet pe un subsol vîscos, astfel că această componentă a forţei centrifuge ar produce o deplasare a continentelor care se îndepărtează de pol. Această deplasare se poate produce extrem de încet, însă în geologie nu contează cîteva milioane de ani.

Cealaltă forţă aparentă care se exercită pe lîngă forţa centrifugă, o forţă *Coriolis* care, spre deosebire de forţa

centrifugă, apare numai în cazul corpurilor în mişcare, este o consecinţă a faptului că viteza de rotaţie a unui punct de pe suprafaţa pămîntului, dirijată de la apus spre răsărit, este cu atît mai mare cu cît punctul este mai departe de axa pămîntului. La o rotaţie a pămîntului, vîrful unui turn trebuie să descrie un cerc mai mare decît baza sa, deci se mişcă ceva mai repede. Dacă lăsăm să cadă o piatră din vîrful unui turn, după cum am văzut mai înainte, piatra, datorită inerţiei, îşi menţine viteza de rotaţie mai mare, „întrece" deci pămîntul şi cade cu cîţiva milimetri mai spre răsărit de direcţia verticală. Luat în mod strict, se adaugă încă o mică apropiere de ecuator.

Acelaşi efect apare şi în cazul unui corp care se deplasează pe pămînt pe direcţia nord-sud. Dacă corpul se depărtează de pol, atunci vine în regiuni cu viteze de rotaţie din ce în ce mai mari, rămînînd deci în urmă, spre vest ; dimpotrivă, dacă se îndreaptă spre pol, corpul este împins spre răsărit. Din această cauză, şinele de cale ferată se uzează neuniform. În emisfera nordică a globului, şinele de cale ferată din partea din dreapta sînt supuse efectului forţei *Coriolis*. Aşa se explică şi legea lui *Baer*, în virtutea căreia fluviile care curg în emisfera nordică de la sud spre nord, cum sînt, de exemplu, marile fluvii din Siberia, caută să se îndrepte spre răsărit, rozînd deci malul lor răsăritean, sau îşi mută chiar albia rîului pînă cînd sînt oprite fie de o înălţime de teren, fie de un mal abrupt. Evident că acest fenomen poate fi anulat prin alte influenţe. Dacă un fluviu curge către sud însă are o pantă atît de puternică încît devine aproape paralel cu axa pămîntului, forţa *Coriolis* îşi poate schimba sensul.

O urmare minunată a acestui fapt, produsă cu o regularitate impresionantă, este devierea către apus a vînturilor alizee. Masele de aer ce se scurg de la nord spre ecuator sînt deviate încet dar sigur către apus, rămînînd mereu în urma pămîntului care se roteşte de la apus spre răsărit, alizeul suflînd apoi ca un nou vînt din direcţia nord-est. Astfel se constată că „forţele aparente" sînt capabile de efecte enorme. După exemplele date de noi se vede însă cît de îndreptăţit este numele ce s-a dat acestor forţe. Dacă nu s-ar şti nimic despre rotaţia pămîntului şi dacă s-ar considera pămîntul ca nemişcat, atunci devierea de la apus spre

răsărit sau îndepărtarea de pol a continentelor ar putea fi explicate numai presupunînd existența unei forțe suplimentare, oarecum misterioasă, care se dovedește a fi „aparentă" îndată ce ne bazăm pe un sistem de referință fix și care nu se rotește o dată cu pămîntul.

ȘI LEGILE MIȘCĂRII AU PRINCIPII

Un tren în mers nu se mișcă după o linie dreaptă, ci urmează conștiincios șinele care, la rîndul lor, urmăresc suprafața rotundă a pămîntului. Aceste șine pot să aibă curbe, să urce sau să coboare. În limbajul mecanicii, acest lucru înseamnă că în fața noastră avem un corp ce nu se mișcă liber, ci unul a cărui mișcare este îngrădită, fiind supus la anumite legături. Se supune oare acest caz legii de mișcare a corpurilor, pe care am considerat-o ca o lege de bază a mecanicii? Și cum se poate ține seama de noile situații intervenite?

Răspunsul la aceste întrebări nu este ușor. În ceea ce privește întrebarea dacă extinderea necesară a legii mișcării corpurilor poate fi justificată sau dacă trebuie considerată ca o nouă condiție bazată pe experiențe și nu pe raționamente, părerile celor mai renumiți savanți au fost cu totul diferite. Să încercăm să justificăm extinderea legii de mișcare a corpurilor despre care am vorbit. În forma sa inițială, legea mișcării corpurilor determină modul în care decurge mișcarea liberă a corpurilor. Din motive pur matematice, în cazul unei mișcări a trenului de felul celei de mai sus, tot accelerațiile sînt acelea care determină mișcarea. Produsele lor cu masele respective formează vectori, cu care se rezolvă ecuațiile mișcării atît pentru mișcarea supusă la legături, cît și pentru cazul mișcării libere. De aceea, acești vectori trebuie considerați ca forțe. Spre deosebire de forțele „aplicate" luate în considerare pînă în prezent, ca, de exemplu, forța gravitațională, aceste forțe se numesc forțe de legătură. Acestea se suprapun primelor forțe și produc mișcarea supusă la legături. Deci forța care trebuie introdusă în legea mișcării pentru cazul mișcării supusă la legături este formată din suma forțelor aplicate și a forțelor de legătură. Dacă un tren parcurge o curbă, la o șină de cale ferată apare

o forță de legătură, o contrapresiune care sileşte vagoanele să meargă pe traiectoria curbă.

Prin introducerea forțelor de legătură în mecanică, aceasta este completă, deoarece în principiu cu ajutorul lor se poate urmări orice mişcare. Determinarea unor formule speciale care se pot aplica în cazuri importante s-a dovedit a fi avantajoasă. Cu aceasta însă începe, în fizică, opera matematicianului. Deoarece în majoritatea cazurilor utilizarea acestor formule a fost făcută de fizicieni (pentru care matematica poate fi asemuită cu o limbă de care aceştia se servesc fără a fi ei înşişi lingvişti), în calculele lor matematice există lipsuri. În special fizicienii consideră încă şi azi mărimile infinit mici ca atare, folosindu-le foarte mult în calcule, însă nu întotdeauna just. Este necesar să ne ocupăm mai îndeaproape de această problemă.

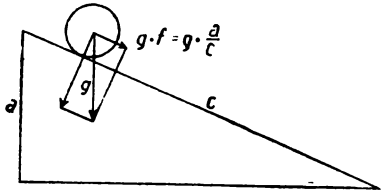


Fig. 70.

Pornim cel mai bine dela suprafețele netede, care formează cele mai simple legături posibile. Să ne închipuim o sferă care se rostogoleşte pe un plan (fig. 70). Să descompunem forța aplicată, gravitatea, într-o componentă dirijată pe direcția tangentei şi a doua componentă dirijată pe direcția normalei, la suprafața planului. O suprafață netedă se va defini prin condiția ca componenta normală să fie anulată de forța de legătură. Presiunea normală este compensată de rezistența opusă de suprafața planului. Rămîne deci să lucreze numai componenta tangențială a forței aplicate. La planul înclinat, aceasta înseamnă că, în cazul cînd gravitatea este forța aplicată, în legea mişcării corpurilor forța g trebuie înlocuită cu forța $g \cdot f$, ceea ce coincide cu cunoştințele noastre anterioare.

În matematici, o suprafață se reprezintă printr-o funcțiune $F(x, y, z)$, egalată cu zero. În această funcțiune, z se poate determina ca funcțiune de x şi y, astfel că avem de-a face cu o mulțime bidimensională de puncte, deci cu o suprafață. Direcția normalei într-un punct este determinată de derivatele întîi ale lui F în raport cu fiecare din coordonatele punctului. Conform definiției unei suprafețe plane, forța

de legătură se exercită pe această direcţie. Componentele acesteia se obţin prin înmulţirea celor trei derivate cu o valoare numerică adecvată λ. Legea generalizată a mişcării corpurilor se exprimă cu ajutorul sumei acestei forţe de legătură şi a forţei aplicate; în această formă ea se numeşte „ecuaţia lui *Lagrange* de speţa întîi". Aceasta poate fi generalizată mai departe pentru un sistem întreg de puncte materiale. În sfîrşit, aceste ecuaţii pot fi generalizate direct şi pentru cazul în care există mai multe legături.

Să ne aruncăm o privire din acest observator mai înalt asupra unei mişcări elementare pe care o execută un punct material pe un cerc. Conform legii forţelor de legătură, rezultă imediat că direcţia forţei centripete este îndreptată spre punctul central. Pentru a determina şi mărimea ei, reamintim că normalele curbelor în reprezentarea parametrică se obţin printr-o dublă derivare. Presupunem viteza unghiulară ca constantă. Din relaţia $x = r \cos \omega t$ şi $y = r \sin \omega t$, notînd derivatele în raport cu timpul t prin puncte puse deasupra, cum se obişnuieşte în mecanică, rezultă :

$$(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2)^{\frac{1}{2}} = [(-\omega^2 r \cos \omega t)^2 + (-\omega^2 r \sin \omega t)^2]^{\frac{1}{2}} = \omega^2 r.$$

Această valoare se poate scrie şi în forma următoare:

$$\frac{1}{r}(\omega^2 r^2) = \frac{1}{r}[(-\omega r \sin \omega t)^2 + (\omega r \cos \omega t)^2] = \frac{1}{r}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

Aceasta este formula lui *Huygens*, obţinută pe baza tehnicii de calcul într-o formă mai clară decît forma obişnuită. Evident că am pornit de la o teoremă generală a normalelor care depăşesc punctul de vedere elementar; trebuie însă menţionat că datele erau generale şi nu se mărgineau numai la cazul special al mişcării circulare.

Ecuaţiile lui *Lagrange* pot să fie rezumate într-o singură ecuaţie, din care se pot deduce apoi din nou ecuaţiile iniţiale. Este vorba de o metodă de scriere prescurtată şi, ca întotdeauna, aceasta înseamnă un nou calcul infinitezimal, dar de această dată un calcul infinitezimal cu deplasări virtuale, pe care le cunoaştem din primul capitol şi care acum trebuie tratate în mod planificat. S-ar merge prea departe dacă s-ar arăta mai întîi punctele de vedere hotărîtoare care au dus la acest calcul infinitezimal. Este preferabil să dăm definiţiile din care se poate ajunge la el şi aceasta

în mod atît de general, încît ele conduc imediat la o dezvoltare importantă a mecanicii.

Tot așa după cum s-a arătat mai înainte că operatorul d formează cheia calculului diferențial, în cadrul noului calcul infinitezimal acest rol îi revine unui operator Δ. Cu puțin timp înaintea sfîrșitului secolului trecut nu se cunoștea decît un caz special al acestui operator, pentru care s-a ales semnul δ. Este izbitor faptul că de la început s-a ales pentru acest operator o literă din alfabetul grecesc care corespunde literei d din alfabetul latin. Probabil că s-a întrevăzut o corespondență care consta din faptul că noul operator lucrează de asemenea cu mărimi infinit mici. Această părere nu poate fi considerată însă hotărîtoare, deoarece lipsește o definiție exactă a noului operator. Corespondența se poate dovedi cu ajutorul diferențierilor, lucru care justifică deplin modul de notare ales. Într-un caz particular despre care s-a vorbit în capitolul „Învingător în întrecerea conținuturilor", această corespondență fusese constatată de *Euler*, în timp ce pentru operatorul general rămînea numai cu indicarea regulilor de calcul. În locul definițiilor și fără să se remarce aceasta s-au dat numai indicații din care trebuiau deduse reguli, deci nu este de mirare că s-au putut strecura unele erori. Mai curînd trebuie să ne mirăm că oamenii s-au putut înșela într-o asemenea măsură încît să considere niște indicații drept definiții. Aceasta se poate explica numai prin faptul că mulți fizicieni mai cred și acum că rigurozitatea în privința trecerii la limită ar fi un lux căruia trebuie să i se opună cu tărie.

A aplica un operator unei funcțiuni înseamnă a forma cu ajutorul lui o funcțiune nouă. Astfel d dă derivata funcțiunii inițiale. Pentru a defini operatorul Δ, trebuie mai întîi să fie bine determinate variabilele de care depinde funcțiunea f, căreia el urmează să-i fie aplicat. Aceasta se realizează prin aceea că se mărește numărul de variabile cu încă o variabilă ε, adică cu încă un „parametru". Dacă se pune $\varepsilon = 0$, atunci trebuie să se obțină vechile relații. În consecință, f poate fi privită ca o funcțiune de ε și de vechile variabile și poate fi derivată în raport cu ε. Dacă se calculează această derivată în punctul $\varepsilon = 0$ și se înmulțește cu ε, atunci se obține o funcțiune care se notează cu Δf. Prin aceasta s-a introdus operatorul Δ. În mecanică el se aplică funcțiunilor

care depind de timp, apoi coordonatelor punctelor materiale şi, în sfîrşit, derivatelor în raport cu timpul ale acestora. Dacă timpul rămîne independent de variabila ε, atunci Δ se înlocuieşte cu δ şi se constată că δ se poate înlocui cu d, lucru care nu mai este valabil pentru operatorul general Δ.

Dacă utilizăm cele spuse mai sus la integralele definite, atunci se ajunge la punctul de plecare al calculului variaţional. La vîrsta de 19 ani tînărul *Lagrange* a descoperit calculul cu δ, pe care ulterior *Euler* l-a consolidat prin introducerea parametrului ε. În anul 1896 acest calcul a fost extins asupra operatorului Δ, însă nu cu atenţia necesară. Din această cauză lipseşte complet în literatura de specialitate un al treilea termen în suma la care se ajunge prin aplicarea operatorului Δ la o integrală definită. Afară de aceasta rămîne să se mai facă şi alte restricţii de la caz la caz pentru determinarea variabilelor, restricţii despre care se vor relata mai tîrziu încă unele lucruri.

Ca urmare a rolului pe care îl joacă utilizarea operatorilor δ sau Δ în calculul variaţional la integrale definite, se vorbeşte despre variaţia acestor integrale. Anularea acesteia este echivalentă cu stabilirea unor ecuaţii diferenţiale, care poartă numele lui *Euler* şi care sînt destul de cuprinzătoare pentru a putea descrie cazuri foarte generale în mecanică. Aceste variaţii se numesc obişnuit principiile mecanicii şi în special, principii integrale. Ca exemplu să considerăm principiul lui *Hamilton*, care se referă la variaţia δ a funcţiunii de sub semnul integrală, integrant care reprezintă energia totală, adică suma energiei cinetice sau de mişcare şi a energiei potenţiale sau de repaus. Ambele feluri de energie formează noţiuni derivate şi chiar dacă s-a amintit de ele la alte capitole, importanţa lor apare de-abia acum. Definiţia lor este uşor de dat. Energia cinetică este egală cu jumătatea produsului dintre masă şi viteza la pătrat, în timp ce energia potenţială reprezintă o funcţiune a cărei derivată, într-un loc dat, este însăşi forţa luată cu semn contrar. Se poate forma un joc de cuvinte cu numele celor ce s-au ocupat de acestea şi anume: ecuaţiile lui şi *Euler* şi ale principiului lui *Hamilton* sînt ecuaţiile lui *Lagrange* de speţa întîi.

Un alt principiu se referă la variaţia energiei cinetice privită ca integrant. Principiul a fost insuficient exprimat

prima oară de *Maupertuis*, preşedintele Academiei prusace de ştiinţe; apoi a fost rectificat de *Euler*. *Maupertuis* nu s-a mărginit la principiul de fizică, ci a făcut consideraţii de ordin teologic, trebuind să suporte sarcasmul lui *Voltaire*, care trăia pe atunci la curtea lui Frederic al II-lea. Lucrarea lui *Voltaire* „Istoria doctorului Akakia", care se referea la *Maupertuis*, a contribuit în mare măsură la căderea autorului în dizgraţia lui Frederic al II-lea.

În afara celor două principii indicate mai înainte, există în mecanică încă un mare număr de principii. Fiecare din acestea este legat de anumite restricţii făcute cu privire la determinarea variabilelor, unele din ele fiind impuse de natura integrantului respectiv, celelalte fiind însă independente de el şi aceleaşi pentru toate principiile. Acestea din urmă depind numai de natura legăturilor. În cazul cel mai simplu al unei suprafeţe F, o astfel de restricţie se obţine prin anularea expresiei care rezultă din înlocuirea diferenţialelor dx_i a coordonatelor punctelor materiale cu δx_i, în expresia diferenţială dF. Dacă este vorba de legături Φ în care, pe lîngă variabilele x_i, figurează şi derivatele acestora în raport cu timpul $\dot{x}_i$, atunci trebuie introdus şi

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i = 0 ;$$

în care membrul întîi al expresiei trebuie privit ca o sumă obţinută, dînd lui i toate valorile şi adunînd produsele astfel obţinute. Legăturile de forma lui F se numesc *olonome*, cele de forma lui Φ *neolonome*, neavînd nici o importanţă faptul dacă Φ este sau nu o funcţiune liniară de $\dot{x}_i$. Această deosebire despre care s-a scris atît s-a crezut că trebuie făcută numai pe temeiul posibilităţii extinderii calculului, pornind de la considerente legate de cazuri particulare.

S-ar putea merge mai departe şi lua în consideraţie legături care să conţină derivate de ordin superior. Principiile cuprind prin aceasta întreaga mecanică. Din ele se pot deduce şi alte moduri de exprimare pentru aceleaşi rezultate, aşa cum este, de exemplu, cunoscuta ecuaţie

$$\left(m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} - \vec{F}_i \right) \delta \vec{r}_i = 0 ;$$

aceasta poartă numele matematicianului *d'Alembert* care a scris, împreună cu *Diderot*, marea Enciclopedie franceză. Ca şi ecuaţia anterioară, şi aceasta se consideră ca o sumă pentru toate valorile lui i; $\vec{F}_i$ este forţa aplicată care se exercită asupra punctului material m_i. Expresiile din paranteză sînt egale cu forţele de legătură, care aci apar înmulţite cu deplasările virtuale. Din această cauză se poate citi din ecuaţie că lucrul mecanic virtual al forţelor de legătură trebuie să fie egal cu zero.

Principiile integrale, precum şi ecuaţia lui *d'Alembert* formează diferite forme de exprimare a unui fapt simplu mecanic cu care am început raţionamentele noastre. Se constată cu uşurinţă cît de puţin se interesează natura de dificultăţile noastre matematice, căci au fost necesare raţionamente stricte pînă ce s-au putut căpăta cunoştinţe matematice suficiente, iar evoluţia mecanicii se loveşte încă de probleme de matematici nerezolvate. În cadrul acestor raţionamente a mai fost necesar să se dea ecuaţiilor fundamentale o formă; acest lucru l-a realizat *Hamilton*.

În acest scop, se porneşte de la faptul că legăturile existente formează nişte condiţii care trebuie satisfăcute de coordonatele x_i. Deci coordonatele x nu sînt independente între ele, una din ele putînd fi determinată din fiecare legătură ca funcţiune de celelalte. Prin aceasta, fiecare legătură micşorează cu una numărul variabilelor independente. Dacă se efectuează această operaţie şi se înseamnă restul de variabile cu q_k, atunci acestea devin independente între ele. Energia cinetică T este o funcţiune de variabilele q_k şi de derivatele lor $\dot{q}_k$ în raport cu timpul. Derivatele $\dot{q}_k$ pot fi înlocuite prin noi variabile p_k, dacă acestea se iau ca funcţiuni de q_k şi p_k, care se pot obţine din ecuaţia :

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

Dacă se fac înlocuirile în expresia energiei totale H, atunci rezultă ecuaţiile canonice ale lui *Hamilton* :

$$\frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

$$\frac{dq_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_k}.$$

În măsura în care mecanica s-a desfăşurat pînă în prezent, ea se ocupă cu unul sau mai multe puncte materiale. Pentru a face mecanica utilizabilă şi pentru lichide, punctele materiale trebuie înlocuite prin corpuri. Din punct de vedere matematic, aceasta înseamnă că pentru masă şi forţă se introduc „densităţile" respective şi se integrează în raport cu acestea. Densitatea de forţă se mai numeşte şi „forţă volumetrică" şi poate fi transformată prin calcul în aşa-numitul tensor de tensiune, un tensor de ordinul al doilea ce apare în deducţiile din „mecanica mediului continuu deformabil", care se ocupă cu comportarea mecanică a corpurilor. Dintre acestea fac parte calcularea unui centru de greutate ca şi determinarea tensiunilor unui pod sau a formelor de scurgere ale curenţilor de aer într-un tunel aerodinamic.

Prin aceasta principial se cunoaşte totul, practic însă numai puţin, lucru datorit unor dificultăţi de ordin matematic. Matematica de azi nu este utilizabilă în cazul aplicării ecuaţiei mişcării pentru lichide. Trebuie deci să ne mulţumim să lucrăm cu ecuaţia simplificată, însă în acest caz nu trebuie să ne mirăm dacă mişcarea lichidelor care rezultă din simplificarea ecuaţiei nu se potriveşte cu aceea din natură. De aceea, în acest domeniu există deocamdată numai rezultate parţiale, cu toate că uneori acestea au o importanţă deosebită. De exemplu „teoria stratului limită", derivată din mecanica mediului continuu deformabil, ajută pe constructorul de avioane să iasă din cadrul încercărilor pure, dîndu-i mijloace să calculeze forţa portantă a aripilor avioanelor.

Mereu se tinde spre particularizarea tensorului tensiunii. Cel mai simplu caz particular îl formează ipoteza că dintre cele nouă mărimi ale matricei sale, numai trei nu devin egale cu zero: cele aflate pe diagonalele principale şi care sînt egale între ele. În acest fel se poate trata statica lichidelor. În acest caz, se obişnuieşte să se vorbească de presiunea hidrostatică a lichidului, o noţiune care iniţial se obţinuse cu totul pe alte căi. Într-o formă paradoxală se constată presiunea unui lichid cu ajutorul unei experienţe, puţin modificată, făcută de filozoful şi matematicianul *Pascal*. Atîrnînd de braţele unei balanţe două recipiente de formă conică în care se află un lichid (fig. 71),

în cazul în care lichidul este la acelaşi nivel în ambele recipiente, aceste braţe vor fi în echilibru, cu toate că greutăţile lichidelor din cele două recipiente sînt evident diferite. Deoarece presiunea hidrostatică depinde numai de înălţimea lichidului din recipiente, presiunea este aceeaşi

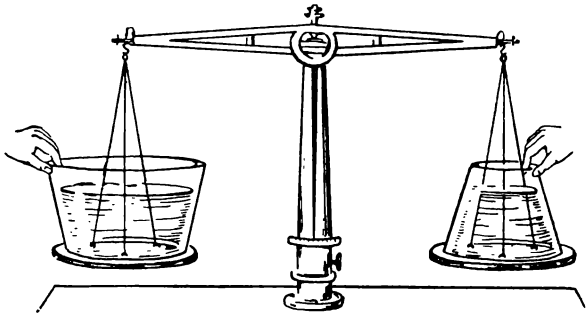


Fig. 71.

şi se manifestă ca o presiune pe fundul recipientelor. Această experienţă constituie paradoxul hidrostatic a lui Pascal.

Pentru stabilirea presiunii asupra fundului unui vas este suficient să facem un raţionament simplu, fapt care măreşte farmecul descoperirii. Dacă se porneşte de la tensorul tensiune şi dacă se defineşte presiunea asupra fundului unui vas ca un caz particular, atunci mirarea produsă de această experienţă dispare imediat. Poate că pare curios, însă aceasta înseamnă un progres, deoarece resimţirea unei mirări are loc atunci cînd făcînd o înşiruire de lucruri curente se ajunge la o concluzie surprinzătoare. A fi surprins înseamnă însă că ne găsim în faţa unui caz pentru care nu eram pregătiţi. Nu puteam să ne aşteptăm la aceasta, deoarece ne lipseau cunoştinţele suficiente pentru a putea prevedea rezultatul. În contrast cu aceasta, avem în tensorul tensiune o noţiune care cuprinde şi presiunea exercitată asupra unui fund, reprezentînd prin aceasta o cunoştinţă superioară.

Dacă se priveşte drumul străbătut, se constată că printr-o generalizare treptată a legii mişcării corpurilor

se cuprinde întreaga mecanică. Din cele trei axiome ale lui *Newton*, prima şi a treia se dovedesc ca nefiind necesare. Prima axiomă nu mai este necesară fiind cuprinsă în a doua axiomă, iar a treia axiomă nu mai este necesară pentru că nu a trebuit s-o utilizăm pentru generalizarea legii mişcării corpurilor. De asemenea şi principiile s-au stabilit fără ajutorul celei de-a treia axiome, care este necesară numai atunci cînd se trece la aplicaţii. Aceasta o evidenţiem în mod deosebit pentru a stabili definitiv structura mecanicii clasice.

O NOUĂ LEGE A MIŞCĂRII

În mod firesc se pune acum întrebarea cît de departe poate merge mecanica. Ea a realizat succese uimitoare şi, deci, se înţelege de ce un timp s-a crezut chiar că întreaga fizică ar putea fi explicată pe baza mecanicii, că s-ar putea reduce numai la mecanică. Această convingere şi-a găsit expresia cea mai tipică în cunoscuta frază a celui mai bine informat demon al lui *Laplace* pe care l-am cunoscut cu ocazia „călătoriei noastre în trecutul fizicii". Din păcate este o concluzie greşită, aşa cum au dovedit-o experienţele nereuşite care încercau să explice fenomenele electrice ca fiind nişte fenomene mecanice. Chiar şi *Maxwell* s-a ocupat fără succes cu această problemă. S-a reuşit să se dea însă o explicaţie mecanică fenomenelor calorice.

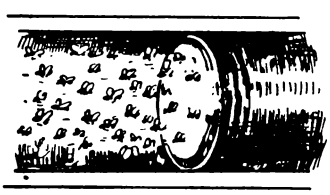


Fig. 72.

Ca exemplu pot servi gazele (fig. 72). Se ştie că acestea se compun dintr-o îngrămădire de molecule ce se mişcă repede, asemănător unui roi de muscuţe care zboară dezordonat. Această imagine poate fi extinsă asupra tuturor corpurilor. Din ea se pot trage concluzii directe care pot fi comparate cu realitatea, de exemplu cu presiunea unui gaz. Acesta ia naştere datorită ciocnirilor neîntrerupte ale moleculelor gazului de pereţii vasului în care se găseşte gazul. Dacă se calculează presiunea, se obţine o ecuaţie între presiunea şi volumul recipientului, pe de o parte, şi $^2/_3$ din energia

cinetică a tuturor moleculelor gazului, pe de altă parte. Această ecuație era cunoscută și de *Daniel Bernoulli*. Membrul din stînga al ecuației este important, deoarece ne amintește de cunoscuta lege fundamentală a gazelor ideale enunțată de *Boyle-Mariotte*.

Nu se poate ajunge însă prea departe cu astfel de concepții simple. Lui *Boltzmann* îi revine marele merit de a fi găsit o soluție pentru acest caz, deoarece pentru explicarea fenomenului el a recurs la noțiunea de probabilitate. Dacă în acest caz, cînd ne găsim în limitele mecanicii pure, se folosește deodată probabilitatea, care este întrucîtva mai „relativă", aceasta nu trebuie să însemne că fenomenele mecanicii nu ar mai putea fi prevăzute cu siguranță, ci numai că noțiunile noastre preliminare sînt insuficiente pentru a putea face aceste presupuneri și că trebuie deci să ne mulțumim cu mai puțin, și anume cu probabilitatea. Aceasta se exprimă de obicei cu ajutorul unei expresii din filozofie și anume că fenomenul mecanic decurge cauzal, fără ca noi să fim în situația de a urmări desfășurarea exactă a fenomenului. Pentru aceasta ar fi capabil numai vestitul demon al lui *Laplace*, care a fost creat de el în acest scop și pe lîngă care *Argus* cu cei o sută de ochi este cu totul neînsemnat, deoarece pentru a putea observa fiecare moleculă în parte, demonul lui *Laplace* ar trebui să aibă cel puțin trilioane de ochi.

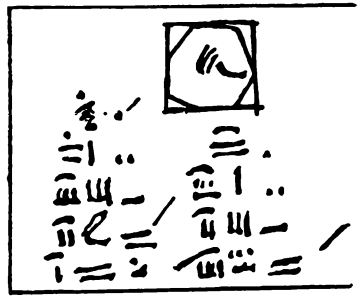


Fig. 73. — Calculul aproximativ al suprafeței cercului. Problema 48 din cartea de calcule a lui Ahmes. Copie după papirus

Dacă noua concepție ajunge mai departe decît cea veche, aceasta s-a realizat prin faptul că noua concepție este mai abstractă. Acest procedeu se observă permanent. Cartea egipteană de calcule a scriitorului *Ahmes*, veche de aproape patru mii de ani (fig. 73), care promitea nu mai puțin decît o „rețetă" pentru „cunoașterea tuturor lucrurilor întunecate" și „tuturor secretelor care sînt cuprinse în obiecte", calculează cu greutate zeci de probleme pe care astăzi un școlar le recunoaște dintr-o

singură privire ca fiind cazuri particulare ale unei reguli generale. Şcolarul de astăzi cu siguranţă că nu este mai înţelept decît scriitorul din antichitate, el însă are noţiuni mai complete, prelucrate între timp. Noţiuni complete sau noţiuni generale se obţin prin raţionamente abstracte. De aci rezultă că în procesul cunoaşterii trebuie să se ţină pasul cu procesul de abstractizare şi acest lucru este posibil, după cum am văzut cu ocazia consideraţiilor noastre asupra matematicii. Evident că nu din această cauză nu s-au făcut critici împotriva concepţiei lui *Boltzmann*, ci pentru că nu ne puteam lipsi de ea. Cu ajutorul noii concepţii asupra teoriei probabilităţilor sau teoriei statistice s-a reuşit într-adevăr să se descrie comportarea gazelor şi să se înglobeze, în sfîrşit, căldura în mecanică.

Cu aceasta se epuizează, ba chiar se depăşesc posibilităţile de utilizare ale mecanicii clasice, deoarece ea este valabilă numai atunci cînd mişcarea nu se face prea repede. Dimpotrivă, viteze mari duc la modificări hotărîtoare. Cîţi observatori, atîtea intervale de timp vor exista în locul unui timp absolut egal pentru toţi, iar legea despre invariabilitatea masei nu mai este valabilă. Formulele care stabileau exact acest lucru le-am cunoscut în călătoria noastră prin trecutul fizicii ; acum este însă necesar să cunoaştem legile din care pot fi deduse.

În esenţă, există două ipoteze care conduc la noua mecanică şi acestea trădează singure originea lor nemecanică. Prima ipoteză atribuie o masă oricărui fel de energie. În mecanica clasică, energia, care are fără îndoială un rol hotărîtor, este introdusă ca o mărime în calcul. În cadrul mecanicii clasice nu există nici un motiv de a materializa energia pe baza noilor ipoteze, aceste motive fiind furnizate de electricitate. Ipoteza cea mai simplă, care consideră energia E proporţională cu masa m, adică $E = c_1 m$, este imediat confirmată. Deci fiecărei cantităţi de energie E îi corespunde o anumită masă m ; invers, fiecărei mase m îi corespunde o anumită energie ; ambele sînt echivalente, dovedindu-se a fi aspecte diferite ale aceleiaşi proprietăţi fundamentale. Să notăm deocamdată factorul de proporţionalitate cu c_1, iar mai tîrziu vom găsi pentru el o valoare specială, aceea a unei constante naturale şi anume viteza de propagare a luminii.

Dacă se efectuează un lucru mecanic, atunci are loc o variaţie a energiei. Să considerăm în special variaţia dE, din care rezultă relaţia $dE = c_1\, dm$; variaţia energiei este proporţională cu variaţia masei. Înainte, am exprimat lucrul mecanic în alt fel şi anume ca produsul scalar dintre forţa şi diferenţiala drumului $\vec{v}dt$. Forţa o putem de asemenea considera ca o variaţie a impulsului. $\vec{F} = d(m\vec{v})/dt$. În felul acesta, lucrul mecanic, deci variaţia energiei, devine :

$$d\,E = \frac{d\,(m\,\vec{v})}{dt} \,.\, \vec{v}\,dt\,.$$

Egalarea celor două expresii pentru $d\,E$ conduce la o ecuaţie diferenţială pentru m, a cărei rezolvare dă relaţia :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_1}}}\,.$$

Aci masa m este reprezentată ca o funcţiune a vitezei v; m_0 reprezintă o valoare minimă, pe care o ia m pentru $v = 0$ şi se numeşte de aceea masă de repaus.

Din formulă rezultă că masa creşte pe măsură ce creşte şi viteza şi că există o viteză finită care nu poate fi depăşită şi nici măcar atinsă, deoarece altfel masa ar deveni infinit de mare; într-adevăr natura nu are teamă de vid, are însă teamă de infinit. Din această cauză această viteză finită, care se înseamnă cu c_1, se numeşte viteză limită. Deci nu pot să existe corpuri rigide; altfel, vîrful arătătorului unui ceasornic destul de mare s-ar mişca oricît de repede.

Valoarea vitezei limită este dată de relaţia $c^2 = c_1$. Deoarece termenul c_1 este independent de sistemul de coordonate ales, doi observatori vor stabili aceeaşi valoare pentru viteza limită. Exprimat în limbaj matematic aceasta înseamnă: dacă se notează coordonatele spaţiului şi timpul primului observator cu x, y, z, t şi acelea ale celui de-al doilea observator cu x', y', z', t', atunci cele două ecuaţii $\frac{x}{t} = c$ şi $\frac{x'}{t'} = c$ trebuie să fie valabile.

Ambele sisteme inerţiale pot să se mişte unul faţă de celălalt cu o viteză uniformă v. Dacă considerăm că cele

două sisteme de coordonate se deplasează paralel unul față de celălalt, deci că ambele axe x alunecă una pe lîngă alta cu viteza v, aceasta nu înseamnă o limitare a generalității. Se cere, mai departe, ca ambii observatori să capete în măsurătoarea vitezei relative v aceeași valoare; în caz contrar, ambele sisteme nu ar fi echivalente.

Să căutăm acum transformările care permit exprimarea coordonatelor x, y, z, t ale unui sistem prin coordonatele x', y', z', t' ale celuilalt sistem. Aceste formule de transformare permit trecerea de la un sistem la celălalt, precum și compararea rezultatelor obținute de un observator cu observațiile celuilalt. Dacă se menține condiția ca transformările să fie liniare, atunci trebuie luat $x = c_2\ (x' + vt')$ și $x' = c_2\ (x - vt)$. Dacă adăugăm că și a doua ipoteză fundamentală și anume că $x^2 = c^2t^2$ se reproduce prin transformarea coordonatelor, atunci se poate calcula factorul de proporționalitate c_2. Se obține valoarea:

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

și se constată că ambele ecuații obținute reprezintă transformările lui *Lorentz*, pe care le cunoaștem din capitolele anterioare.

În spiritul acestei concepții, valoarea vitezei finite c se obține prin încercări pur mecanice. Această valoare se dovedește a fi în concordanță cu valoarea propagării libere a luminii, ceea ce se anticipase în cadrul considerațiilor de mai înainte. Lumina înseamnă însă energie și această energie reprezintă o masă care nu se poate mișca niciodată cu viteza limită. Pentru a scăpa de această contradicție trebuie să facem un sacrificiu, care constă în mărturisirea că electrodinamica reclamă un nou mod de formulare. Din păcate acesta nu s-a realizat încă.

Din liniaritatea acestora rezultă că transformările lui *Lorentz* pentru diferențele de timp și de lungimi, care se înseamnă cu Δ, sînt valabile în forma neschimbată

$$\beta \Delta x' = \Delta x - v\Delta t$$
$$\beta \Delta t' = \Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x.$$

Pentru a avea înaintea ochilor un exemplu concret, să considerăm că sistemul x, y, z, t reprezintă o gară de cale ferată şi sistemul x', y', z', t', un tren. Ceasornicul gării cere ca $\Delta x = 0$. Din ecuaţia a doua de mai sus rezultă „dilatarea" timpului.

$$\Delta t' = \beta^{-1} \Delta t,$$

Pentru a determina lungimea unei bănci din gară, călătorul va trebui să facă o fotografie din trenul care trece prin gară. Aceasta înseamnă că $\Delta t' = 0$. În acest caz, din a doua ecuaţie rezultă că

$$\Delta t = \frac{v}{c^2} \Delta x,$$

care introdusă în prima ecuaţie după simplificarea prin β ne dă „contracţia" lungimii

$$\Delta x' = \beta \Delta x.$$

Din formulele de transformare se poate calcula imediat în ce raport se găsesc vitezele pe care le măsoară doi observatori ai aceluiaşi fenomen. Acelaşi lucru este valabil şi pentru acceleraţii. Din aceste formule rezultă din nou că c este o viteză limită. Dacă am vrea să obţinem o viteză supralumină prin aceea că dintr-un avion care zboară aproape cu viteza luminii am trage un glonţ în direcţia de zbor a avionului, acest glonţ părăsind ţeava puştii aproape cu viteza luminii ar avea, în conformitate cu mecanica clasică, o viteză aproape dublă faţă de viteza luminii. În mecanica nouă însă, contrar aşteptării, ambele mişcări se compun astfel în baza formulelor, încît observatorii de pe pământ ar constata că glonţul se mişcă mai încet decît lumina.

Pentru a obţine formulele de transformare pentru forţă, se porneşte de la o formulare a legii mişcării corpurilor care este valabilă şi în acest caz şi pe care am mai întîlnit-o. Am considerat forţa egală cu derivata, în raport cu timpul, a impulsului. Deoarece de această dată însăşi masa este variabilă, acceleraţia nu mai are direcţia forţei. Aceasta ar trebui să ne facă să fim precauţi în aplicarea legii. Chiar dacă, aşa cum este cazul de faţă, nu pot fi

găsite cu uşurinţă argumente, aceasta nu trebuie în nici un caz să dea frîu liber speculanţilor.

În sfîrşit, să calculăm legea conservării energiei. Lucrul mecanic cheltuit pentru o particulă este :

$$\vec{F}\,\vec{ds} = \vec{v}\,d(m\vec{v}) = v^2\,dm + \frac{m}{2}\,dv^2.$$

Această sumă poate fi adusă în forma $c^2 dm$. Pentru a dovedi acest lucru, să înlocuim în ambele expresii a căror egalitate este presupusă pe m cu

$$m_0\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

şi să diferenţiem. Diferenţiala lucrului mecanic poate fi scrisă şi cu ajutorul energiei potenţiale U, în dependenţă de timp, sub forma $-dU$. Însă din $c^2\,dm = -dU$ rezultă indirect constanţa expresiei $m\,c^2 + U$ pentru energia totală a particulei.

Rezultatele teoriei relativităţii restrînse capătă o formulare deosebit de elegantă dacă se recurge, aşa cum a făcut *Minkowski*, la un spaţiu cu patru dimensiuni. În acest caz, x, y, z, t se consideră ca nişte puncte într-o „lume nouă", dezvoltîndu-se geometria lor din diferenţiala arcului $ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2\,dt^2$. Aceasta pare mai dificil decît este în realitate, deoarece introducînd $\frac{x}{i}$, $\frac{y}{i}$, $\frac{z}{i}$, ct ca noi variabile, ecuaţia ia forma ecuaţiei lui *Pitagora*. Se obişnuieşte însă să se aleagă, în loc de x, y, z, ict, noi variabile x_1, x_2, x_3, x_4 şi să se schimbe apoi toate semnele din partea dreaptă a ecuaţiei, deci să se considere expresia $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$ ca o mărime caracteristică a noii lumi (spaţiul cu patru dimensiuni).

Această expresie nu se modifică la trecerea dintr-un sistem inerţial în altul ; ea păstrează pentru toţi observatorii aceeaşi valoare şi din această cauză se numeşte un invariant. Astfel de invarianţi, care înseamnă particularizări, sînt mulţi în noul spaţiu cu patru dimensiuni. Mai înainte ne-am mai întîlnit cu un astfel de invariant. În acest spaţiu cu patru dimensiuni lucrurile nu se petrec chiar atît de complicat după cum se susţine. Numai în cazul cînd se părăseşte acest spaţiu pentru a reveni la noţiunile obişnuite

se separă timpul t de coordonatele spațiale x, y, z; lumea cu patru dimensiuni se desparte în spațiu și timp și distanțele și durata se schimbă o dată cu observatorul.

Noua formulare reprezintă mai mult decît o metodă generalizată de notare, deoarece prin generalizarea expresiei se obține posibilitatea de a introduce o metodă generală de măsurare în lumea spațiu-timp cu patru dimensiuni a unui element de arc. Prin aceasta se admit diferite sisteme de referință și nu numai sisteme inerțiale. Acest lucru îl bănuia matematicianul *Reimann* încă din anul 1854, cînd era de părere că geometria spațiului nostru înconjurător ar fi determinată de fizică. Însă abia *Einstein* atacă cu succes această problemă, punînd astfel bazele teoriei relativității generalizate.

Ca o consecință imediată se atribuie materiei o influență asupra geometriei. Această influență se constată în noua mecanică prin așa-numitele ecuații ale cîmpului care leagă între ele materia și structura geometrică a universului. Prin aceasta materia se manifestă din punct de vedere fizic și, deci efectul pe care înainte l-am cunoscut sub numele de atracție este inclus în geometria determinată prin ecuațiile de cîmp; în felul acesta s-a geometrizat forța gravitațională. Aceasta își pierde existența ei independentă, ceea ce reprezintă un progres enorm în ceea ce privește concepția unitară a lumii. Totuși, o astfel de concepție a lumii nu este încă completă, deoarece făcînd abstracție de faptul că în lumina noilor experiențe teoria relativității generalizate se poate aplica numai fenomenelor care nu aparțin lumii atomilor, pînă în prezent nu s-a reușit să se geometrizeze și electricitatea și prin aceasta să o supunem condiției de concepție unitară a naturii, în care caz cuvîntul unitar ar putea însemna tot atît de bine geometric.

Matematica este folosită pe o scară foarte întinsă în cazul de față. Ar însemna însă să se nege însăși esența oricărui progres, dacă ne-am lăsa în șelați în ideea că acesta nu va cere eforturi și mai mari. Dimpotrivă, trebuie să se înțeleagă că orice progres cere efort. Pe lîngă aceasta în decursul vremii părerea asupra ceea ce este greu sau ușor se schimbă. Cu siguranță că contemporanii lui *Leibnitz*

şi *Newton* nu se gîndeau că mai tîrziu calculul diferenţial va fi învăţat de şcolari la vîrsta de 16 ani ; însă tocmai această evoluţie ne îndreptăţeşte să ne aşteptăm ca în viitor acest calcul să fie învăţat de şcolari şi mai tineri, aşa încît cei mai vîrstnici să înveţe atîta matematică cît se dovedeşte că este absolut necesară pentru a putea lucra cu teoria relativităţii generalizate. Şi dacă pînă atunci această teorie va fi depăşită, istoria fizicii ne învaţă că noua teorie care o va înlocui va cere şi mai multă matematică.

Neluarea în consideraţie a acestei situaţii a provocat adversităţi puternice împotriva noii teorii. Un pericol poate şi mai mare îl formează însă publicaţiile care pledează de fapt pentru teoria relativităţii, deci se arată favorabile acesteia fără ca însă autorii acestor publicaţii să o fi înţeles. Pentru aceştia este valabil proverbul care spune: „Fereşte-mă de prieteni, că de duşmani mă apăr singur".

Despre un progres se poate vorbi numai atunci cînd dintr-o teorie nouă se obţin noi rezultate, care depăşesc rezultatele teoriilor mai vechi şi care sînt confirmate prin experienţă. Teoria relativităţii generalizate oferă numeroase rezultate de acest fel. Pentru a înţelege aceste rezultate trebuie să pornim de la mişcarea în care forţele se echilibrează. În geometria euclidiană — în cazul mecanicii clasice — această mişcare se petrecea în linie dreaptă ; în acest caz linia dreaptă este distanţa cea mai scurtă dintre două puncte. Dacă trecem la cealaltă geometrie, cea neeuclidiană, în general nu mai există drepte, dar există totuşi o distanţă care este cea mai scurtă dintre două puncte. Pe sferă acestea sînt reprezentate de cercurile mari, care rezultă din secţiuni făcute pe suprafaţa sferei cu planuri ce trec prin cercul sferei. În acest caz se vorbeşte de liniile „cele mai drepte" sau de liniile geodezice. Acestea constituie cazuri limită şi pot reprezenta tot atît de bine distanţa cea mai scurtă ca şi distanţa cea mai lungă dintre două puncte. Conform noilor teorii, pe astfel de linii geodezice se mişcă puncte materiale asupra cărora nu se exercită nici o forţă. Această nouă lege a inerţiei nu coincide însă cu vechea lege a inerţiei, deoarece în geometria euclidiană dreptele sînt într-adevăr liniile cele mai scurte dintre două

puncte; totuşi, spre deosebire de legea relativităţii, în mecanica clasică atracţia dintre corpuri este considerată ca o forţă care scoate mişcarea de sub influenţa legii inerţiei. Noua lege a inerţiei conţine, dimpotrivă, forţele aparente şi este în general valabilă şi pentru lumină.

Să aplicăm cele spuse mai sus întîi asupra sistemului solar. Această posibilitate este oferită de faptul că masa soarelui este enormă de mare. Din această cauză, planetele pot fi considerate ca nişte puncte, aşa-numitele corpuri de probă a căror masă este neglijabilă. Structura geometrică a universului va fi în acest caz determinată numai de soare, iar planetele se supun legii inerţiei. După *Kepler*, o planetă descrie în mersul ei o elipsă, însă după legea relativităţii această afirmaţie nu mai este complet valabilă. În mişcarea ei, planeta nu se mai întoarce exact în punctul de plecare, orbita acesteia nu se închide, ci ea descrie aproximativ o rozetă, care se formează prin rotirea înceată a unei elipse (fig. 74). Din calculele făcute în baza observaţiilor asupra planetei Mercur, cu mult înaintea apariţiei teoriei relativităţii, a rezultat într-adevăr că orbita lui Mercur este o orbită în formă de rozetă. Din păcate rotirea orbitei se produce atît de încet, încît nu se poate susţine cu siguranţă că noua teorie este valabilă şi din punct de vedere numeric.

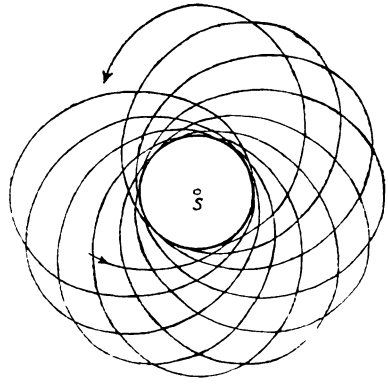


Fig. 74.

Acelaşi lucru este valabil şi în privinţa devierii luminii în imediata apropiere a unor mase mari cum este, de exemplu, Soarele. Acest lucru modifică mult structura geometrică a universului; liniile cele mai scurte din apropierea Soarelui sînt diferite faţă de acelea depărtate de Soare. Din această cauză se modifică şi unghiul sub care se văd două stele: o dată, cînd Soarele este într-o regiune mai îndepărtată a cerului şi altădată, cînd stelele sînt

văzute în apropierea marginii lui (fig. 75). Acest unghi este format de razele luminoase, care sînt liniile cele mai scurte şi care în cazul al doilea se curbează mai puternic. Valoarea cu care se modifică însă acest unghi este atît de redusă, încît se află la limita posibilităţii de măsurare.

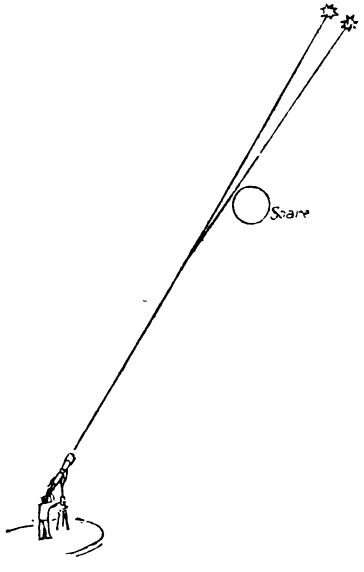


Fig. 75.

Asemenea cameleonului, lumina are culoarea locului de la care provine. Dacă lumina vine de la suprafaţa Soarelui, are o culoare mai roşie decît aceea pe care ar fi căpătat-o pe pămînt în aceleaşi condiţii. Această culoare şi-o menţine însă în drumul ei, prin aceasta deosebindu-se de un cameleon care ar căpăta mereu alte culori, corespunzătoare locului în care se află. Lumina îşi dă deci în vileag originea, deoarece ne trădează de unde provine şi cum arată acolo structura geometrică a lumii.

După cum ştim din matematică, pentru fiecare punct x, y, z, t se poate forma un sistem de coordonate, în care cel puţin într-o primă aproximaţie este valabilă teoria relativităţii restrînse, astfel încît corpul care se studiază este în repaus, oricare ar fi mişcarea lui în sistemul iniţial. Se spune atunci că sistemul este sistemul propriu al acestui corp, iar timpul este timpul său propriu s. Lumina dă relaţii asupra raportului $\frac{dt}{ds}$. Dacă ne închipuim soarele ca fiind singura masă în univers, atunci la distanţa r de la centrul Soarelui este valabilă cu aproximaţie relaţia $1 + \frac{mk}{rc^2}$, m fiind masa Soarelui şi k constanta lui *Newton* din legea de atracţie a corpurilor. Deci deplasarea către culoarea roşie este foarte redusă; la suprafaţa soarelui

valoarea expresiei este de $2{,}12.10^{-6}$, aceasta putînd fi totuşi observată de *Adams* şi *St. John*.

O deplasare către culoarea roşie se obţine şi dintr-un raţionament legat de teoria cuantelor şi nu de teoria relativităţii generale. Conform acestei teorii, fotonul $h\nu$ străbate un cîmp gravitaţional. Deoarece fotonul are o masă, el produce un lucru mecanic. Diferenţiala acestui lucru mecanic este produsul dintre $\frac{h\nu}{c^2}$ şi variaţia de potenţial dU pe elementul de drum. Lucrul mecanic este furnizat de cantitatea de energie reprezentată de foton. Aceasta înseamnă o modificare $d\nu$ a frecvenţei pe parcurs — şi deci, contrar celor de mai sus, a culorii —, modificare legată de o micşorare exponenţială a masei fotonului. În conformitate cu aceasta este valabilă expresia :

$$- h d\nu = \frac{h\nu}{c^2} d U.$$

După simplificarea cu h, din această expresie rezultă deplasarea frecvenţei către culoarea roşie

$$\frac{d\nu}{\nu} = - \frac{d U}{c^2}.$$

Pentru trecerea cît mai simplu posibil de la diferenţiale la diferenţe, se neglijează pur şi simplu scăderea de masă a fotonului.

Pentru a evita această concluzie s-ar putea încerca o explicaţie, presupunînd că fotonul iese din cîmpul gravitaţional, în contul energiei sale cinetice. Însă pe măsură ce fotonul se depărtează de centrul de gravitate, energia cinetică a fotonului ar trebui să crească, deoarece lumina se propagă mai încet în cîmpul gravitaţional. Prin aceasta efectul ar creşte încă şi mai mult atîta timp cît creşterea energiei cinetice a fotonului nu este compensată prin scăderea masei acestuia. Deplasarea suplimentară către culoarea roşie care ar trebui să rezulte se înlătură prin explicaţia că concepţia despre existenţa fotonului nu este compatibilă cu teoria relativităţii.

Există o structură geometrică a universului sau, cu alte cuvinte, există o rezolvare a ecuaţiilor cîmpului care explică perfect deplasarea nebuloaselor spirale. În călă-

toria noastră în trecutul fizicii am vorbit pe larg despre acestea. Aşa se explică că noi putem urmări creşterea universului, în timp ce în anul 1759 *Boscovici* şi mai tîrziu *v. Helmholtz, Lord Kelvin, Poincaré* erau de părerea că dacă dimensiunea tuturor lucrurilor s-ar dubla peste noapte, aceasta nu s-ar putea constata. Oare această afirmaţie are în genere vreun sens? Nu are, deoarece despre o dublare se poate vorbi numai atîta timp cît nu toate lucrurile s-ar fi dublat. De altfel, în acest caz pendulele obişnuite ar trebui să rămînă în urmă, deoarece cu creşterea distanţei scade atracţia dintre corpuri, toate corpurile pierd din greutate şi pendulul ar oscila mai încet. În acest caz şi pămîntul s-ar roti mai încet în jurul axei sale şi anume viteza s-ar reduce la jumătate, în timp ce pendulul ar oscila cu $\sqrt{8}$ mai mult timp.

Trebuie să mai adăugăm că pentru diametrul universului nostru rezultă o valoare de cîteva sute de milioane de ani lumină. Această cifră este uimitor de redusă; cu ajutorul celui mai mare telescop existent astăzi în lume, care se găseşte pe muntele Palomar, se priveşte aproape sfîrşitul spaţiului nostru cosmic — o imagine întrucîtva cam neplăcută. Într-o astfel de lume finită lumina se întoarce la locul ei de plecare; desigur că aceasta durează un oarecare timp, totuşi se poate găsi timp suficient pentru a ne întoarce şi a saluta cu reverenţă imaginea noastră care se înapoiază din spaţiu.

Două modele cosmologice ale lumii, stabilite mai înainte, atribuie acesteia un diametru cu mult mai mare, primul model cuprinde însă numai materie, fără mişcare, iar al doilea model numai mişcare, fără materie, astfel încît nici unul din modele nu poate fi privit ca o soluţie fericită a problemei.

CUM SE COMPORTĂ PARTICULELE CELE MAI MICI?

Se pare că orice noţiune matematică nouă ar avea soarta ca mai devreme sau mai tîrziu să capete o existenţă aparte în fizică. Acest lucru îl întîlnim în repetate rînduri în studiul mecanicii şi în teoria relativităţii. Într-o măsură şi mai mare îl întîlnim în mecanica cuantelor, care îşi

datorează succesele ei tocmai acestei situații. Numai astfel mecanica cuantelor reușește să stabilească fenomenele ce au loc în învelișul atomului, încercare la care au eșuat atît mecanica clasică cît și teoria relativității.

Miezul acestei teorii îl formează o ecuație. Pentru a o stabili, trebuie să ne amintim de structura corpusculară a luminii. Conform teoriei cuantelor, lumina se compune din fotoni, aceștia avînd o energie $h\nu$ și un impuls hk, în care ν înseamnă frecvența, iar k inversul lungimii de undă $1 : \lambda$, deci numărul de unde, în sfîrșit h fiind constanta lui *Planck* a cărei valoare am mai întîlnit-o. În felul acesta unui foton, pe care la început ni-l reprezentăm ca o particulă de energie, îi corespunde un fenomen oscilatoriu, o undă.

Să încercăm, la început în mod cu totul formal, să atribuim și particulelor elementare, ca, de exemplu, electronilor, o undă. Energia E a unei particule, conform definiției clasice, să o notăm cu $h\nu$, iar impulsul acesteia mv, cu hk. Dacă ν și k reprezintă într-adevăr frecvența și numărul de unde, atunci unda ψ corespunzătoare acestora trebuie să satisfacă ecuația undei. Pentru unde de frecvență egală cu unitatea aceasta se poate exprima ușor prin ecuația:

$$\Delta\psi + \frac{4\pi m i}{h}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{8\pi^2 m}{h^2} U\psi = 0.$$

De această dată Δ este operatorul lui *Laplace* și reprezintă suma derivatelor parțiale de ordinul al doilea ale coordonatelor spațiale, iar U reprezintă energia potențială. Rezultatul este o ecuație în funcție de timp, ecuația *Schrödinger*, în cinstea descoperitorului ei *Erwin Schrödinger*.

Din relația considerată pentru impulsul $mv = hk = \frac{h}{\lambda}$ rezultă pentru lungimea de undă valoarea $\lambda = \frac{h}{mv}$. După numele savantului *Louis de Broglie*, această expresie se numește lungimea de undă *Broglie* a unei particule elementare. Din valoarea lungimii de undă se poate determina viteza unei particule elementare. Aceasta ne îndeamnă să încercăm ca, pornind de la unde, să caracterizăm particulele elementare. Procedînd în felul acesta

ajungem la concluzii care la început par paradoxale. În cazul undelor întîlnim fenomenul de difracţie, care ar trebui să se producă şi în cazul particulelor elementare. Spre surprinderea generală, în anul 1927 *Davisson* şi *Germer* au putut să observe perfect de bine fenomenul de difracţie la undele materiale ale particulelor elementare, o dovadă convingătoare a justeţei ipotezei formulate.

Dacă se porneşte de la unde, atunci înseamnă că trebuie să se indice modul cum se poate ajunge la cunoaşterea tuturor caracteristicilor particulelor. La început nu s-au găsit legile care să facă această trecere de la undă la particulă. Astăzi însă sîntem totuşi în posesia lor. Cheia o formează calculul probabilităţilor, care indică locul unde se găseşte o particulă. Evident că nici cu această singură indicaţie nu se ajunge prea departe, întocmai ca în cazul cînd se dădeau indicaţii pentru găsirea comorilor îngropate ale piraţilor. Pătratul amplitudinii unei unde trebuie să reprezinte o măsură a probabilităţii de a întîlni particula dată într-un anumit loc. După cum se vede, în cazul de faţă ne-am lăsat ghidaţi de o analogie cu lumina. Această probabilitate sau, mai bine spus, această densitate de probabilitate variază cu timpul, astfel că avem de-a face cu un fenomen de scurgere, la care se pot aplica legile fluidelor. În acest fel se reuşeşte să se conchidă în cadrul unei imagini ondulatorii că totalitatea particulelor rămîne constantă în timp.

Totuşi noua teorie a obţinut succese remarcabile, noi puncte de vedere fiind descoperite de fizicieni şi explicate de filozofi. Noua teorie explică cum particulele elementare pot învinge energia potenţială a unui cîmp, forţe de respingere localizate spaţial, care sînt mai mari decît energia lor. În mecanica clasică aceasta ar fi imposibil, pentru că în aceasta nu există decît „sau — sau" : sau energia cinetică a unei particule este mai mică decît bariera potenţialului şi atunci nu poate trece peste acesta, sau este mai mare şi atunci trece. Mecanica cuantelor ajurge dimpotrivă la alt rezultat. Dacă se aplică ecuaţia lui *Schrödinger*, rezultă că există o probabilitate diferită de zero pentru ca o particulă să treacă bariera potenţialului şi una de asemenea diferită de zero pentru ca particula să se reîntoarcă, la barieră, o interpretare modernă a săge-

ţii şirete a lui Cupidon. Ambele probabilităţi se completează, rezultînd probabilitatea 1, aşa cum de altfel trebuie să fie, deoarece unul din cele două cazuri se produce neapărat. În acest caz se vorbeşte despre „efectul tunel" cu ajutorul căruia s-a explicat dezintegrarea radioactivă care nu putuse fi înţeleasă pînă acum. Semnificativ este faptul că în cadrul mecanicii cuantelor, acest fenomen efectul tunel, a fost descoperit simultan de mai mulţi cercetători.

În lumina celor spuse mai sus se impune o concluzie radicală. Dacă explicaţia pe baza teoriei probabilităţilor obţine astfel de succese, atunci trebuie explicată în totalitatea ei şi trebuie deci să bănuim că există probabilităţi nu numai în ceea ce priveşte indicarea locului unde se găseşte o particulă, ci şi în privinţa posibilităţii de existenţă a diferite valori ale tuturor mărimilor fizice. În consecinţă, pare fără sens să se spună că o lungime are o valoare perfect determinată. Lungimea are mai multe valori, fiecare din acestea avînd o anumită probabilitate. Pe cît pare de straniu acest lucru la prima vedere, această concepţie se poate aplica în mod concludent şi explică fenomene care altfel nu reuşeau să fie explicate.

În aceste cîteva fraze este cuprinsă o evoluţie furtunoasă de cîteva decenii care, începînd cu *Lenard*, căruia i se datorează noi noţiuni fundamentale, şi cu *Planck* se continuă cu lordul *Rutherford*, *Niels Bohr*, *Louis de Broglie*, *Heisenberg* şi *Schrödinger*. A fost un drum lung, cu numeroase întorsături şi ocoluri, cu greşeli şi neînţelegeri care au dus la părerile de astăzi. Pentru a da formă acestei noi teorii, trebuie găsită o formulare matematică adevărată. Aceasta reuşeşte în cadrul spaţiului *Hilbert*, pe care l-am mai întîlnit. Se poate dovedi că o funcţiune ondulatorie poate fi interpretată ca un punct în spaţiul *Hilbert*, diferitelor mărimi fizice corespunzîndu-le anumiţi operatori. Trebuie să ne obişnuim cu ideea că trebuie să învăţăm un nou limbaj, pentru a putea gîndi în spiritul noii teorii. Cine cunoaşte acest limbaj are o privire clară asupra mecanicii cuantelor, ale cărei elemente de bază vor fi indicate mai jos.

Orientîndu-ne după fotoni este uşor de a stabili o bază cuprinzînd un număr restrîns de operatori. În acest

fel se constată că, făcînd abstracţie de factorii numerici pe care îi putem indica îndată mai amănunţit, energiei îi corespunde derivata în raport cu timpul, iar componentei impulsului, derivatele parţiale în raport cu coordonatele spaţiale. Pentru operatorul energiei, factorii numerici sînt $-\frac{h}{2\pi i}$, iar pentru operatorii impulsului, $\frac{h}{2\pi i}$. Mai departe se constată că din înmulţirea funcţiunii de undă cu coordonatele respective rezultă operatorul pentru determinarea poziţiei. Însă operatorul unei mărimi fizice, construit formal din alţi operatori, se obţine prin introducerea în formulă a operatorilor acestor mărimi. Trebuie însă să se ţină seama că algebra pentru operatori nu este aceeaşi cu algebra obişnuită, deoarece în prima, succesiunea factorilor în produs nu este indiferentă; se ştie că operatorii nu trebuie să fie neapărat comutativi. În felul acesta dispunem de un dicţionar care ne permite traducerea ecuaţiilor mişcării din mecanica clasică în limbajul operatorilor. Rezultatul îl constituie ecuaţia în funcţie de timp a lui *Schrödinger*, obţinută astfel printr-o nouă metodă.

Pentru a putea indica valorile de măsură posibile şi probabilităţile lor, se porneşte de la faptul că fiecare operator determină un sistem de coordonate. Din valorile componentelor funcţiunii de undă rezultă probabilităţile căutate, în timp ce valorile de măsură apar ca nişte soluţii proprii. Prin aceasta se înţeleg următoarele : dacă însemnăm operatorul cu A şi o valoare posibilă cu a, atunci este valabilă ecuaţia $A\psi = a\psi$. Membrul din stînga al egalităţii înseamnă un punct în spaţiul *Hilbert*, cel din dreapta, de asemenea, iar ecuaţia dovedeşte că amîndouă punctele coincid. Aceste definiţii, care desigur nu sînt epuizate, dacă ne dăm osteneala de a ne însuşi calculul operaţional, sînt foarte simple. Iniţial s-a încercat să se traducă totul în limbaj matricial, dar *v. Neumann* a putut să arate că acesta nu era indicat pentru scopul propus. Lui *v. Neumann* i se datoreşte în primul rînd calculul operaţional, în măsura în care acesta a fost necesar pentru utilizări în mecanica cuantelor.

Avantajul calculului operaţional se constată în mod

convingător atunci cînd se porneşte de la două mărimi, ca, de exemplu, poziţie şi impuls. Un calcul elementar conduce imediat la relaţia dintre împrăştierile lor, care indică gradul de nedeterminare al indicaţiilor şi care se notează în formule prin semnul Δ. Pentru poziţie şi impuls, relaţia afirmă că produsul împrăştierilor lor nu poate fi niciodată mai mic de $h : 4\pi$. Cu cît este mai bine precizată poziţia, cu atît se poate spune mai puţin despre mărimea impulsului. Nu se reuşeşte niciodată să se obţină în acelaşi timp valori exacte pentru ambele mărimi. Iniţial, această relaţie a fost găsită inductiv de *Heisenberg*; ea poartă numele de relaţie de nedeterminare. La început, această relaţie a avut un efect surprinzător, chiar senzaţional, însă senzaţia dispare atunci cînd matematica îşi afirmă drepturile. De altfel, în privinţa cuprinsului, relaţia de nedeterminare a fost introdusă cu mulţi ani înainte în raţionamentele statistice cuantice ca o mărime celulară finită de neatins, desigur fără a i se fi recunoscut importanţa ei. Dacă în relaţia de nedeterminare se introduce $p = mv$ şi se ia $m = 1$ g, atunci membrul al doilea al relaţiei dă o ordine de mărime de 10^{-28} pentru produsul $\Delta q \cdot \Delta v$. Conform acestei relaţii, pentru viteza unei particule cu masa de 1 g, a cărei poziţie momentană este stabilită cu o precizie de ordinul lungimii de undă optice, precizia admisă este de 10^{-23} cm/sec. Aceasta concordă perfect cu rezultatele obţinute în mecanica universului. Cu totul alta este situaţia pentru electronul care se roteşte în jurul nucleului atomului de hidrogen, al electronului de valenţă al chimiştilor. Viteza electronului de valenţă al unui atom de hidrogen neexcitat poate fi stabilită numai cu o abatere de milioane de kilometri pe oră. Ipoteza stabilirii de valori precise pentru mase este prin ea însăşi în contradicţie cu principiile mecanicii cuantelor. Această stabilire de valori s-a făcut numai în scopul efectuării unor calcule orientative.

Relaţia de nedeterminare a fost luată în discuţiile acauzaliştilor. Dacă se admite că mecanica cuantelor este definitivă în forma ei de astăzi, atunci ar fi fără sens să se vorbească de cauzalitate, deoarece, conform relaţiei de nedeterminare discutată mai sus, poziţia şi viteza particulelor elementare nu sînt determinate exact în acelaşi

timp ; şi fără această presupunere nu se poate vorbi de fenomene cauzale. Dar de ce oare să se combată cauzalitatea numai pe baza acestor consecinţe ce decurg din calcule ? Cauzalitatea se poate combate mult mai bine dacă se porneşte de la ipoteza fundamentală conform căreia valorile posibile care dau poziţia unei particule nu pot fi exprimate cu siguranţă, ci numai cu anumită probabilitate. Chiar dacă se poate aranja în aşa fel ca aceste probabilităţi să dispară toate, cu excepţia uneia singure, aceasta, în spiritul teoriei probabilităţilor, nu înseamnă de loc că toate celelalte valori sînt excluse prin această singură excepţie. Din această cauză nu se poate stabili niciodată o situaţie prezentă, precisă, a stării unui sistem, aşa cum o cere cauzalitatea, deoarece nu se poate susţine că o mărime are, în mod precis, o valoare sau alta. Din punctul nostru de vedere, aceste explicaţii nu hotărăsc de loc dacă un fenomen al naturii este cauzal sau nu, deoarece noi susţinem cu tărie că mecanica cuantelor înseamnă, fără îndoială, primul pas făcut cu succes în lumea atomilor. O teorie definitivă nu numai că lipseşte deocamdată, dar trebuie chiar să fie cu totul alta decît cea existentă.

Aceasta nu ne scuteşte însă de datoria de a dezvolta actuala teorie atomică. În acest caz întîmpinăm o dificultate care a fost considerată atît de serioasă, încît *v. Neumann* a denumit-o „o dificultate principală, ba chiar deficienţa cea mai importantă a mecanicii cuantelor". Dificultatea constă în faptul că pentru a se putea face abstracţie de durata minimă a măsurătorilor, a trebuit să i se atribuie timpului o situaţie specială. Dacă nu se ţine seama de caracterul special al timpului, atunci acesta trebuie considerat ca un operator care este legat de operatorul energie prin relaţia de nedeterminare, la fel ca poziţia de viteză. În măsura introducerii timpului ca o reprezentare ne dăm însă seama că aceasta este de altă natură, ca, de exemplu, indicarea unui loc, care este cu totul obiectivă, în timp ce afirmaţia, de exemplu, că „este ora 8" are numai o valoare abstractă. De aceea sîntem îndreptăţiţi să facem o excepţie pentru timp şi să nu îl considerăm ca un operator, ci să tratăm timpul drept ceea ce reprezintă şi anume ca o indicaţie numerică sau, cu alte cuvinte, ca un parametru. În baza experienţei,

timpul a fost considerat de la început ca un parametru, fără a putea să se explice prin aceasta pretinsa contradicție. Această contradicție dispare de la sine îndată ce timpul este privit ca o reprezentare.

Cu aceasta mecanica cuantelor este reprezentată „more geometrico". Chiar dacă în acest fel structura mecanicii cuantelor este fără cusur, nu ne putem îndoi totuși că ea reprezintă numai un stadiu de trecere. Dacă ne gîndim că am putut să dezvoltăm mecanica cuantelor în baza unei paralele făcute între un foton și o particulă elementară, însă că fotonul nu este un reprezentant valabil din toate punctele de vedere al fenomenelor atomice, atunci nici nu ne putem aștepta la alt rezultat. Din această cauză este important să se facă încercarea de a se trasa limitele acestei teorii, o încercare care a și fost întreprinsă în diferite direcții.

ÎNTRECERE ÎN DESCOPERIRI

Oricît a fost de mare progresul obținut în lumea atomilor, rămîne clar de la început că el reprezintă numai un succes parțial, deoarece ecuația în funcție de timp a lui *Schrödinger* formează într-adevăr traducerea reușită a mecanicii clasice cu ajutorul „dicționarului" nostru, dar nu se știe încă cum trebuie tradusă teoria relativității.

O particulă elementară avînd masa de repaus m_0, care se mișcă într-un cîmp fără forțe $U = 0$, reprezintă cazul cel mai simplu. Ca în cazul particulelor lente, se iau în considerație unde materiale, notînd cu $h\nu$ energia și hk impulsul particulei. De rîndul acesta energia se notează cu mc^2. Dependența masei m de viteza v este exprimată prin ecuația

$$(mc^2)^2 - (m_0c^2)^2 = c^2\,(mv)^2.$$

Membrul din dreapta al egalității se mai poate scrie $c^2(hk)^2$. Repetînd calculul care ne-a ajutat la stabilirea ecuației lui *Schrödinger*, introducînd pentru hk noua expresie, rezultă :

$$\Delta\,\psi - \left(\frac{2\pi m_0 c}{h}\right)^2 \psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0.$$

Cu această ecuație *Yukawa* a avut o idee genială.

Yukawa şi-a zis că termenul al treilea din această ecuaţie o transformă într-o ecuaţie ondulatorie, în acelaşi sens ca în cazul unui cîmp electromagnetic φ fără sarcini, deci $\Delta\varphi = 0$, a cărui ecuaţie ondulatorie este :

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Cîmpurile ψ, ca în cazul de faţă :

$$\Delta\psi - \left(\frac{2\pi m_0 c}{h}\right)^2 \psi = 0,$$

erau cunoscute încă din fizica clasică. Numai că atunci în locul expresiei din paranteză pentru constantă se scrie pur şi simplu k. În afara sferei cu raza $\frac{1}{k}$ cîmpul scade foarte repede, aşa cum rezultă direct din forma matematică a soluţiei.

Cîmpul ψ se comportă ca o particulă, tot aşa după cum se comportă cîmpul φ ca un foton. ψ se acordă cu nucleul atomic prin faptul că $\frac{1}{k}$ se ia egal cu raza nucleului. Valoarea acestuia are ordinea de mărime 10^{-13} cm şi din punct de vedere numeric coincide cu $\frac{e^2}{m_e c^2}$. În această formulă, e reprezintă sarcina şi m_e masa de repaus a electronului ; rezultă că $\frac{m_0}{m_e} = \frac{hc}{2\pi e^2}$. Membrul al doilea are valoarea 137, valoare asupra căreia s-a discutat mult în legătură cu altă chestiune încă neclămurită.

Yukawa a emis astfel postulatul existenţei particulelor elementare, a căror masă de repaus este de 137 de ori mai mare ca a electronului.[1] Procedeul său este însă cu totul formal şi de aceea nu convinge. Nu a fost crezut de nimeni pînă ce rezultatele obţinute cu ajutorul razelor cosmice, care ajung la noi din adîncimile universului, nu i-au dat dreptate. Aceste noi particule se numesc mezoni, uneori şi electroni grei.

[1] Cercetătorul japonez Yukawa, care a avut îndrăzneaţa idee a previziunii existenţei mezonilor, a continuat lucrările savanţilor sovietici Tamm, Ivanenko şi Skolev. Previziunea teoretică a lui Yukawa a fost confirmată experimental în 1937. Fizicienii romîni efectuează interesante lucrări teoretice şi experimentale asupra mezonilor. *(N. R.)*

Noi nu ne oprim însă aci, ci încercăm să atribuim pentru $\frac{1}{k}$ valoarea 10^{-14} cm. Aceasta ne duce la o masă de 10 ori mai mare, cu alte cuvinte la protoni şi neutroni, constituindu-se astfel o explicaţie formală pentru aceste particule. Deci protonii şi neutronii sînt celule spaţiale încărcate cu masă, adică formate din unde materiale. Astfel, nucleul atomic nu ar cuprinde mai mult decît o mie de protoni şi neutroni şi dacă s-ar ţine seama de spaţiile intermediare care rămîn neocupate, oricît de densă ar fi îngrămădirea, nucleul atomic ar fi mai mic. Aceasta echivalează cu imposibilitatea existenţei unor elemente foarte grele. Luînd valoarea 10^{-11} pentru $\frac{1}{k}$, rezultă electroni, pozitroni şi particule grele corespunzătoare fără sarcină, care ar fi toate mai mari decît nucleul atomului, în contradicţie cu raza clasică a electronului care este $1{,}43 \cdot 10^{-13}$ cm. Conform acestor date, electronii nu ar avea loc în nucleul atomic. Luînd valoarea de care nu ne-am ocupat încă $\frac{1}{k} = 10^{-12}$, ar trebui să existe noi particule care, datorită masei lor de 10 ori mai mare decît aceea a electronului, ar putea fi de asemenea numite electroni grei. Pentru a exclude valori intermediare pentru $\frac{1}{k}$ ar trebui ca însuşi spaţiul plin de materie să fie despărţit în cuante; din această cauză ultimele consideraţii trebuie privite ca simple speculaţii.

Pentru a putea transpune teoria relativităţii în mecanica cuantelor, s-ar putea porni şi de la un sistem propriu, în care particulele elementare să fie în repaus şi astfel să se supună unor formule simple. Însă atunci, din cauza transformărilor lui *Lorentz*, trecerea către un sistem de referinţă comun ar avea ca rezultat atîtea valori diferite pentru timp cîte particule există, o dificultate care nu a fost încă înlăturată.

Din această cauză, pentru început ne restrîngem la încercările de extindere a acestor rezultate asupra unei singure particule a cărei deplasare în univers se notează cu *ds*. În acest caz diferenţiala arcului *ds* se exprimă mai întîi cu ajutorul teoriei relativităţii restrînse şi apoi printr-o

combinație liniară a diferențialelor coordonatelor dx_i, în care coeficienții desigur că nu sînt numere obișnuite, ci matrice. Dacă pentru ds se egalează ambele expresii, rezultă o ecuație care cu ajutorul dicționarului nostru se poate transpune în limbajul mecanicii ondulatorii și care se numește, după descoperitorul ei, ecuația lui *Dirac*. Ea a fost obținută în 1928 de *Dirac* pe altă cale. Este o ecuație de undă; totuși, unda lui *Dirac* nu mai reprezintă o funcție în domeniul obișnuit al cifrelor, deoarece conține matricele amintite mai sus. Ea poate fi însă înlocuită cu patru funcții de undă obișnuite din teoria lui *Schrödinger*. Din această cauză unda lui *Dirac* se numește vectorială spre deosebire de unda scalară a lui *Schrödinger*.

Să încercăm să explicăm pe scurt mersul calculului. În acest scop să exprimăm diferențiala arcului ds ca o legătură liniară între valorile dx_k, rezultînd deci $ds = i_k\, dx_k$. Pe de altă parte am avut $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$. Din aceste două ecuații se pot determina coeficienții i_k. Astfel se obțin ecuațiile $i_k^2 = 1$, $i_k\, i_l = -i_l i_k$, din care rezultă că i nu sînt numere obișnuite. Numerele i au fost cercetate încă din anul 1878 de *Clifford* și se numesc unități hipercomplexe. Nu este greu să se găsească matrice care să satisfacă aceste condiții.

Din teoria relativității restrînse rezultă de asemenea că $ds = ic\beta dt$. Dacă egalăm ambele expresii ale lui ds, atunci rezultă $i_k\, \dot{x}_k = ic\beta$. Prin transpunere, din această ecuație se obține ecuația lui *Dirac*. Dacă particula considerată, un electron cu sarcina e și cu masa de repaus calculată sub formă de energie E_0, se găsește într-un cîmp electromagnetic, care ca de obicei este reprezentat printr-un potențial cu patru dimensiuni U_k, atunci ecuația lui *Dirac* ia forma următoare:

$$\left[i_k \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{2\pi i e}{hc} U_k\right) \pm \frac{2\pi}{hc} E_0\right] \psi = 0.$$

Semnul plus-minus apare dacă se utilizează ambele semne pentru β.

După rezultatul de mai sus nu mai poate să surprindă pe nimeni faptul că această ecuație este invariantă față de transformările lui *Lorentz* și prin aceasta satisface condițiile teoriei relativității, această ecuație reprezentînd într-adevăr

un pas înainte pe calea dorită. Ea reprezintă însă un progres şi în altă privinţă, deoarece face posibilă explicarea anumitor observaţii din domeniul spectroscopiei.

Chiar în cursul expunerilor anterioare am văzut că un atom poate absorbi sau emite energie numai sub formă de particule. Aceste fragmente de energie erau fotonii şi din lungimile de undă măsurate se pot trage concluzii asupra valorilor energiei posibile pe care poate să o aibă atomul sau, după cum se mai spune, asupra nivelelor lui energetice. Se constată că vechea teorie a cuantelor reda corect numai în linii mari observaţiile spectroscopiei. Pentru a explica abaterile observate, în anul 1925 *Goudsmit* şi *Uhlenbeck* au presupus că electronii ar poseda un anumit „spin" învîrtindu-se neîntrerupt în jurul axei lor, aşa cum se învîrteşte pămîntul în jurul soarelui, rotindu-se însă în acelaşi timp şi în jurul propriei sale axe. Datorită mişcării de rotaţie în jurul axei proprii, electronii au deci o energie de rotaţie suplimentară şi în plus anumite proprietăţi magnetice. Ipoteza lui *Uhlenbeck* şi *Goudsmit* s-a dovedit foarte fructuoasă. Evident că aceasta era numai o ipoteză de lucru pentru acest scop special şi numai *Dirac*, prin teoria sa, a putut să transforme ipoteza în teorie, introducînd prin aceasta mişcarea de spin în fizică.

Această teorie are o urmare foarte surprinzătoare, aproape neplăcută, care a rezultat chiar din cele dintîi ecuaţii premergătoare ecuaţiei lui *Dirac*, descoperite în anul 1926 de *Kudar* şi *Schrödinger*. Aceste ecuaţii afirmau că există electroni liberi cu energie totală negativă şi că sînt posibile treceri de la nivelele energetice pozitive obişnuite la cele negative. Ce înseamnă însă din punct de vedere al fizicii electroni cu energie totală negativă? *Dirac* a emis opinia că din punct de vedere matematic aceşti electroni se comportă la fel ca particulele cu sarcină pozitivă şi energie totală pozitivă. În acest caz *Dirac* ar fi trebuit să admită existenţa unui nou fel de particule elementare avînd masa electronilor şi o unitate de sarcină pozitivă, particule care astăzi se numesc pozitroni. La început *Dirac* nu a îndrăznit să afirme acest lucru, ci a crezut că aceste particule ar fi nuclee de hidrogen, cu toate că acestea aveau o masă de circa 1 850 de ori mai mare. Cîţiva ani mai tîrziu *Anderson* a descoperit în mod experi-

mental pozitronul. Faptul însă că din formule matematice s-a prezis existența unor particule elementare nu a rămas izolat și îndreptățește să se vorbească despre o putere magică a formulelor matematice.

Evident însă că, pentru a ține seama de stabilitatea atomului de hidrogen, *Dirac* s-a văzut silit să facă o ipoteză care pare stranie. El a presupus că toate nivelele energetice negative sînt ocupate de electroni și că numai în mod excepțional sînt părăsite de aceștia. Dacă un electron scapă de pe un nivel energetic negativ, el apare ca un electron obișnuit; unda lui *Dirac* însă trebuie să corespundă golului lăsat de electronul scăpat. Acest gol apare ca pozitron. Potrivit acestei situații, electronii cu energie totală negativă formează un domeniu magic care din punct de vedere al fizicii nu se manifestă în nici un fel, spre deosebire de spiritele din acest domeniu care sînt electronii scăpați de pe nivelele energetice. Dacă această părere este adevărată, atunci electronii și pozitronii trebuie să apară în același timp; electronul scăpat și golul lăsat de el, consecință observată experimental, au putut confirma ipoteza lui *Dirac*.

Dacă vrem, în teoria lui *Dirac* putem vedea începutul unei electrodinamici a cuantelor. De enunțarea legilor ei s-au preocupat fizicieni foarte renumiți, dar nici astăzi nu sînt încă satisfăcătoare. Această electrodinamică a cuantelor se comportă ca și fizica nucleară, care, în ciuda unor succese parțiale însemnate, nu este încă definitiv stabilită și despre care ne vom ocupa mai îndeaproape în cele ce urmează.

Pentru a putea aprecia corect nestatornicia primelor legi, se recomandă să se cerceteze drumul ce a fost parcurs pînă s-a ajuns la părerile valabile astăzi. Încă din antichitate se presupunea că lumea este formată din particule foarte simple, considerate ca indivizibile și numite atomi, ceea ce înseamnă în grecește „indivizibil". Timp de două mii de ani s-au făcut mai mult speculații decît cercetări exacte în acest domeniu. De-abia în anul 1815 *Prout* a întrevăzut că atomii sînt formați din hidrogen și deci se poate vorbi cu drept cuvînt despre o „anatomie a atomului". Străduințele alchimiștilor de a transforma elementele chimice unele într-altele nu ar fi fost atît de imposibile,

așa cum au susținut-o mult timp urmașii acestora, chimiștii ; însă numai după descoperirea radioactivității a devenit o certitudine de nezdruncinat faptul că există într-adevăr astfel de transformări.

Această descoperire s-a desfășurat într-un mod tot atît de interesant ca un roman polițist. Începutul l-a format o convorbire între doi savanți cu renume nemuritor, membri ai Academiei franceze, *Henri Poincaré* și *Henri Becquerel*, după ședința din 20 ianuarie 1896, în care *Poincaré* ținuse o comunicare despre experiențele terminate tocmai atunci de către *Roentgen*. Acesta izbutise să obțină raze invizibile cu o lungime de undă cu mult mai mică decît lumina obișnuită. Pentru obținerea acestora, printr-un tub de sticlă în care se făcuse un vid aproape complet se trimitea un curent electric, din care cauză de la polul negativ se emiteau, cu viteze mari, către pereții tubului, electroni negativi. Acolo, viteza electronilor dispărea, nu însă energia lor, deoarece aceasta nu se pierde niciodată, ci își schimbă numai forma în care apare — și *Roentgen* descoperise, în razele ce-i poartă numele, tocmai această nouă formă de energie.

Amîndoi savanții au fost de acord că trebuie să se cerceteze în mod organizat la ce fenomene de fluorescență și la care transformare de radiații mai apar astfel de raze cu lungimi de undă scurte. Ca urmare, *Becquerel*, în laboratorul său destul de modest din institutul *Cuvier*, a început să facă experiențe cu săruri de uraniu. El a expus aceste săruri razelor solare și a obținut într-adevăr înnegrirea unor plăci fotografice care erau protejate contra luminii obișnuite. Se părea deci că prin fluorescență sărurile de uraniu produc raze cu lungimi de undă scurte. S-a constatat în curînd însă că impresionarea plăcilor fotografice se datora altei cauze. Astăzi am fi putut prevedea acest lucru, deoarece știm că, pe de o parte, stratul de aer atmosferic nu permite trecerea razelor cu lungimi de undă scurte și că, pe de altă parte, prin fluorescență nu se pot produce niciodată radiații cu lungimi de undă mai scurte decît acelea ale luminii care le-a produs. Deci lumina solară care ajunge pe pămînt nu poate să se transforme în raze *Roentgen* care să impresioneze plăcile fotografice.

Atunci cînd *Becquerel* a voit să-și continue experiențele, a trebuit să le întrerupă, vremea rămînînd mai multe zile

în şir înnourată. La 1 martie *Becquerel* a developat una din plăcile fotografice pregătite pentru experienţe şi păstrată într-un dulap în apropierea sărurilor de uraniu, găsind pe aceasta două pete negre. Această placă fotografică istorică se păstrează şi astăzi în acelaşi laborator. Prin aceasta se descoperise radioactivitatea sărurilor de uraniu. Radiaţiile ce impresionează placa fotografică trebuiau să provină chiar de la sărurile de uraniu. Scurt timp după aceasta, *Becquerel* a putut să stabilească că radiaţiile proveneau din elementul chimic uraniu. Evident că astăzi am căuta sursa acestor radiaţii în atomii elementului uraniu, însă pe atunci se bîjbîia încă prin întuneric; toţi se pregăteau cu ezitare să păşească într-un domeniu nou, necunoscut. A durat doi ani întregi pînă ce *Maria Sklodowska-Curie*, fosta colaboratoare a lui *Becquerel*, ajunse la această bănuială în cadrul unei lucrări privitoare la elementul thoriu, lucrare supusă Academiei franceze la 12 aprilie 1898.

Cum se explică radioactivitatea? Lordul *Rutherford* dădu primul răspuns prin crearea unui nou model atomic. După *Rutherford*, fiecare atom reprezintă un sistem solar în miniatură, sistem în care electronii se rotesc în jurul nucleului atomic ca planetele în jurul soarelui. Astăzi, acest model al atomului este considerat ca prea grosolan; ca imagine însă mai aduce încă servicii, iar trăsătura fundamentală a structurii sale dintr-un nucleu atomic greu, cu un volum mic, şi un înveliş atomic uşor compus din electroni poate fi considerată ca sigură. Nucleul atomic este purtătorul proprietăţilor chimice ale atomului. Nucleele care au aceeaşi sarcină electrică, însă mase diferite, se comportă la fel din punct de vedere chimic şi se numesc izotopi. Diferenţa de masă depinde de numărul particulelor elementare din care este compus nucleul şi care sînt legate între ele prin energii enorme.

Să ne facem o imagine asupra acestui lucru. Atomul de aur are masa atomică 197,2, deci cîntăreşte cît 197 atomi sau nuclee de hidrogen. Deoarece nucleul de hidrogen cîntăreşte $1{,}675 \cdot 10^{-24}$ grame, rezultă că un gram de aur conţine $3 \cdot 10^{1}$ atomi. Aurul ocupă locul al 79-lea în sistemul periodic al elementelor, ceea ce înseamnă că nucleul său atomic are 79 de unităţi de sarcină pozitivă. Deci

sarcina pozitivă totală a unui gram de aur este de $79 . 3 . 10^{21}$ unităţi de sarcină, care trebuie înmulţite încă cu $4{,}803 . 10^{-10}$ pentru a le transforma în sistemul C.G.S. Deoarece aurul este neutru, această sarcină pozitivă trebuie să fie compensată de o sarcină negativă tot atît de mare. Dacă s-ar putea separa cele două sarcini una de cealaltă, atunci conform legii lui *Coulomb* ele ar trebui să se atragă de la o distanţă egală cu mărimea unui bob de mac cu o forţă egală cu greutatea pămîntului. Deci spiritele prizoniere în aur nu pot fi învinse de nici un muritor ! Fizica modernă cunoaşte însă poveşti care nu sînt poveşti.

În cazul elementelor radioactive ca uraniul sau radiul, care sînt situate la sfîrşitul sistemului periodic al elementelor, nucleul este foarte greu, el conţine un număr mare de particule elementare ; la uraniu sînt cel puţin 234 de particule, însă probabil că aceste formaţiuni complicate nu sînt viabile pentru mult timp. Mai de vreme sau mai tîrziu, nucleul se „dezintegrează" — cum se spunea mai înainte —, mai corect spus nucleul se transformă prin eliminarea unei particule elementare din complexul nucleului. Prin aceasta evident că se modifică şi însuşirile sale chimice ; prin dezintegrare radioactivă, dintr-un element se obţine un alt element. Cantităţile enorme de energie care se liberează în acest caz se exteriorizează prin puterea extraordinară cu care sînt aruncate particulele din nucleu şi care se ridică la milioane de electronvolţi. Electronvoltul este o unitate de energie, *eV*, specifică fizicii atomice şi ea corespunde cantităţii de energie căpătată de un electron atunci cînd este accelerat cu ajutorul unei diferenţe de tensiune de 1 volt.

Pentru început s-au putut stabili trei feluri de radiaţii. În cazul radiaţiilor alfa se expulzează o particulă grea, un nucleu de heliu. Radiaţiile beta sînt compuse din electroni negativi obişnuiţi. În sfîrşit se eliberează şi fotoni, radiaţii gama, care, potrivit energiei mari pe care o posedă, au o lungime de undă foarte mică, lungime de undă care este mai mică chiar decît a celor mai penetrante raze *Roentgen* ce se pot obţine astăzi.

Transformarea elementelor radioactive naturale se petrece fără intervenţia noastră, în mod spontan, cu o viteză constantă care nu poate nici să crească, nici să scadă. De cîtva timp sîntem însă în situaţia de a sili şi elemente care

în mod normal sînt inactive stabile să se transforme. Putem să producem deci o radioactivitate artificială, de exemplu prin bombardarea acestor elemente cu nuclee de hidrogen sau heliu. În cadrul acestei radioactivități artificiale este remarcabil faptul că apar și alte produse de dezintegrare, ca, de exemplu, pozitroni sau particule elementare fără sarcină, avînd aceeași masă ca protonii și anume neutronii descoperiți în anul 1932.

Tocmai cu ajutorul radioactivității artificiale s-a putut pătrunde destul de adînc în problemele de chimie nucleară. Elementele se transformă unele în altele într-un mod aproape uimitor, stabilindu-se chiar o serie de legi care guvernează aceste transformări. Din păcate, în fizica nucleară lucrurile stau mai puțin favorabil. Nu se știe încă cu siguranță din ce fel de particule elementare este construit nucleul atomic și în special cum este structura lui. Ipoteza cea mai utilizată astăzi și recomandată de *Heisenberg* este următoarea : „În nucleu, ca particule independente există numai protoni și neutroni. Electronii și pozitronii nu sînt preexistenți în nucleu, ci se produc în momentul emisiunii lor printr-un proces care nu poate fi încă explicat cu ajutorul teoriei actuale, proces în care, conform legii conservării sarcinii, un neutron se transformă într-un proton, sau invers".

După cum s-a mai spus, neutronii sînt particule elementare fără sarcină, avînd aceeași masă ca și protonii. Conform acestei teorii, întreaga sarcină electrică a nucleului atomic, care determină proprietățile chimice ale elementelor, s-ar datora protonilor. Prin această teorie se continuă ideea lui *Prout*, căreia însă nu i se poate atribui același grad de certitudine ca în cazul părerilor asupra structurii învelișului atomic.

Evident că în acest domeniu s-au obținut succese, numai că acestea au fost realizate mai mult pe tărîm experimental. Ce extinderi enorme pot lua aceste experiențe ne-o arată, din nenorocire, bomba atomică aruncată la Hiroșima, care a distrus dintr-o dată un oraș mare. În acest caz este vorba de reacții nucleare care sînt de milioane de ori mai puternice decît procesele chimice. Anticipînd, se poate spune : materia se transformă în energie. Aceasta se poate obține prin spargerea nucleului, dar și

prin fenomenul invers, o sinteză de nuclee din alte nuclee mai uşoare, aşa cum este cazul la bomba cu hidrogen.

În această privinţă începutul l-a făcut în anul 1934 *Fermi*, care îşi spunea că zidul de protecţie electrică al nucleului nu constituie nici o piedică pentru neutronii fără sarcină. Absorbţia acestora modifică bilanţul de energie al nucleului şi îi imprimă o radioactivitate artificială. Se obţine astfel din uraniu elementul radioactiv 93, care apoi se transformă mai departe în elementul 94 cu viaţă lungă. Din punct de vedere chimic cele două elemente, reniu şi osmiu, sînt înrudite. Ele au căpătat numele neptuniu şi plutoniu. Mai tîrziu au fost obţinute elementele transuraniene : americiu 95, curiu 96, berkeliu 97, californiu 98, einsteiniu 99, fermiu 100, elemente care sau nu se găsesc de loc în natură, sau se găsesc în cantităţi extrem de reduse.[1]

În anul 1939, prin bombardarea cu neutroni, *Hahn* a fisionat uraniul în elemente de greutate atomică medie, cu care ocazie au fost eliberate cantităţi enorme de energie. Această energie a fost obţinută în contul masei produselor de fisiune, transformată parţial în energie şi, din această cauză, apărea mai mică decît cantitatea de masă iniţială.

Cum se împacă însă acest lucru cu fenomenul numit packing-effect al pierderii de masă datorat energiei de legătură negative dintre particule. Pentru o dezintegrare totală în particule elementare, fenomenul pierderii de masă cere ca masa totală să fie mai mare. La fisiunea uraniului însă acest fenomen nu se petrece.

Mai tîrziu s-a constatat că neutronii lenţi atacă izotopul de uraniu 235. Acest izotop este amestecat cu uraniu obişnuit cu greutatea atomică 238 într-o proporţie de 0,7%. Dimpotrivă, neutronii rapizi, avînd peste un milion de electronvolţi, atacă chiar şi uraniul 238.

La dezintegrarea uraniului, pentru un atom de uraniu se liberează 2 pînă la 3 neutroni, care, atunci cînd întîlnesc nuclee, provoacă la rîndul lor alte fisiuni. Acest lucru se

[1] De la data publicării originalului german a acestei cărţi s-au mai sintetizat elementele 101, căruia i s-a dat numele de Mendeleeviu (în cinstea geniului savant rus Dimitrie Ivanovici Mendeleev, descoperitorul legii periodicităţii proprietăţilor elementelor chimice) şi elementul 102. Acesta din urmă a fost sintetizat în anul 1958 prin bombardarea curiului (elementul 96) cu nuclee de carbon. (*N. R.*)

întîmplă însă numai după o anumită traiectorie a neutronilor, din această cauză pentru o cantitate mai mică de uraniu nu este pericol de fisionare. Dimpotrivă, la aruncarea unei bombe unirea a două cantităţi mici de uraniu este suficientă pentru provocarea unei explozii.

Energia atomică se obţine în reactori care reprezintă o bombă atomică explodînd foarte lent. Pentru atingerea acestui scop trebuie dirijată numai densitatea neutronilor produşi în reacţia de fisiune. De exemplu bromul, ca produs de fisiune, prin emisiunea unui electron se transformă în elementul cripton, care, la rîndul lui, emite un neutron întîrziat, prin aceasta reuşindu-se să se frîneze reacţia în lanţ. Adăugarea de cadmiu sau grafit frînează neutronii, care altfel ar fi captaţi de uraniu 238. Materialul de frînare are scopul de a nu permite încetarea reacţiei în lanţ.

Pentru a da oarecare indicaţii numerice, să ne gîndim că 1 kg uraniu 235 conţine $1\,000 : 235 . 1{,}675 . 10^{-24}$ circa $2{,}5 . 10^{24}$ atomi. La fisiune, pentru fiecare atom de produs de fisiune se produc cîte 160 de milioane de electronvolţi sau $6 . 10^{-13}$ kcal de energie cinetică, astfel că fiecare kilogram de material de fisiune liberează 15 miliarde de kcal. Într-o explozie se pierde 80% din această energie. Prin arderea unui kilogram de cărbune se produc numai 8 mii kcal. Posesia unor surse atît de enorme de energie cere însă popoarelor o responsabilitate mai mare.

Alcătuirea nucleului numai din particule grele are avantajul că, în baza a încă unei ipoteze suplimentare, se poate aplica mecanica cuantică, nerelativistă. Această ipoteză aplică egalitatea energiei potenţiale cu cea cinetică de la învelişul atomic, unde s-a dovedit valabilă, asupra nucleului atomic. Energia potenţială menţine împreună protonii şi neutronii, îi leagă între ei şi de aceea se numeşte energie de legătură şi se determină din deficitul de masă al nucleului. Din numărul de protoni şi neutroni care formează nucleul se poate calcula mai întîi cît de mare ar trebui să fie masa nucleului, stabilindu-se apoi că, în realitate, această masă este ceva mai mică, cauza datorîndu-se energiei de legătură care este negativă, căreia îi corespunde în consecinţă şi o masă negativă.

Dacă se porneşte de la protonii cu masă negativă, atunci aceştia, sub influenţa respingerii electrice, s-ar

îngrămădi la un loc, deoarece, conform legii a doua a mișcării corpurilor a lui *Newton*, în cazul unei mase negative accelerația este dirijată în sens contrar forței. Deficitul de masă a nucleului ar trebui apoi compensat prin neutroni suplimentari care ar trebui să fie de două ori mai numeroși decît protonii ; ca rezultat final, în masa nucleului ar trebui să fie de trei ori mai mulți neutroni decît s-a presupus pînă în prezent.

Acela căruia această presupunere i se pare prea îndrăzneață, să se refere la ipoteza mai moderată din penultimul alineat. Această ipoteză permite să se răspundă la întrebarea de ce stelele sînt capabile să radieze cantități de energie atît de mari. Suprafața pămîntului primește zilnic de la soare circa o mie de bilioane de kilowatt-ore. Dacă această energie ar trebui să fie acoperită de energia gravitațională, care se liberează prin contracția soarelui, atunci radiația solară ar fi acoperită de 150 de milioane de ani, care este un interval de timp foarte scurt în comparație cu viața unei stele. Dimpotrivă mărimea packing-effect-ului din nucleul de heliu, transformată în energie radiantă, este suficientă pentru acoperirea emisiunilor de energie ale soarelui. Bomba cu hidrogen a învățat acest lucru de la Soare, creînd prin aceasta paradoxul unei construcții distrugătoare.

Conform lui *Bethe*, această transformare se produce în mai multe etape. La început, un nucleu de carbon cu masa atomică 12, captează un proton, devenind un nucleu de azot cu masa atomică 13. Acest izotop al azotului este nestabil și emite un pozitron, transformîndu-se în carbon 13. Acesta este stabil și captează un al doilea proton, formîndu-se azotul obișnuit cu masa atomică 14, care, prin captarea unui al treilea proton, se transformă în oxigen cu masa atomică 15. Acest nou nucleu este nestabil, emite un pozitron și se transformă în azot cu masa atomică 15, care captează în sfîrșit al patrulea proton. În urma emiterii celor doi pozitroni, doi dintre protoni se transformă în neutroni, astfel că din totalul de patru protoni captați rămîn doi protoni și doi neutroni, care se leagă sub forma unui nucleu de heliu. Ceea ce rămîne este format din materialul inițial, carbon cu masa atomică 12, care joacă astfel rolul unui catalizator.

Dacă nucleul unui atom este compus numai din particule grele, atunci pentru aceste particule rezultă viteze de deplasare nu prea mari, în timp ce vitezele electronilor ar fi atît de mari încît ar trebui neapărat să fie calculate în baza teoriei relativității. Dacă se analizează forțele care se exercită între protoni și neutroni, se pare, din păcate, că existența unui nucleu compus numai din particule grele nu este posibilă, deoarece, după cunoștințele actuale, aceste forțe se datoresc unui schimb continuu de electroni, a căror existență s-a încercat zadarnic să fie considerată ca fiind numai „virtuală".

În felul acesta se ajunge la convingerea că este vorba numai de o presupunere provizorie, căreia desigur nu i se pot nega succese importante. Aceste succese au fost de altfel obținute și pe baza vechilor păreri, care considerau nucleele compuse din protoni și electroni. Astfel încă de mult timp s-a reușit să se explice radioactivitatea în mod mulțumitor în linii generale. Și dacă această explicație s-a obținut cu ajutorul unor raționamente provenite din studiul învelișului atomului, aceasta ne dovedește în mod convingător cît de puțin s-a pătruns în fizica nucleară pură.

Viitorul ne va învăța acest lucru — poate chiar un viitor apropiat. Este vorba aici de problema nucleului, în jurul căreia se duce o luptă dîrză și aprigă și pentru care oamenii își dau osteneala de a procura neîncetat material nou experimental. Pretutindeni se înființează institute mari și chiar foarte mari, care se dedică exclusiv acestei probleme. În aceste institute de cercetări există cele mai felurite aparate posibile. Oricît de diferite ar fi principiile după care lucrează aceste aparate, toate servesc pentru o accelerare cît mai mare a particulelor, astfel ca acestea să pătrundă în cele mai rezistente nuclee atomice și să le silească să se transforme. În felul acesta aparatele sînt în întrecere cu radiumul, iar numeroasele reacții nucleare noi sînt indicate să asigure priviri din ce în ce mai adînci în structura nucleului atomic. Ele ne dau speranța că o dată se va reuși să se libereze și să se utilizeze în tehnică uriașele energii ce zac în nucleele atomilor, chiar dacă această epocă de aur a tehnicii nu pare să fie atît de apropiată. Nu este vorba numai de păreri teoretice ci de crearea unor valori noi foarte mari, care promit modificarea completă a aspectului lumii.

Primele steaguri au fost înălțate în semn de sărbătoare și ele au înșelat amarnic așteptările. Se luaseră fîșii de aceeași lățime și spre surprinderea tuturor, acestea păreau a avea lățimi diferite. Pentru a da aparența unor fîșii identice, culorile albastru, alb și roșu trebuie alese într-o proporție de 30 : 33 : 37; numai ceea ce este diferit pare să fie la fel. Deci o nouă iluzie optică. Oare acest lucru nu amenință la fiecare pas fizicienii? Pe ce se mai pot bizui aceștia? Nu se clatină oare prin aceasta întreaga știință?

Întrebarea este îndreptățită, tot așa și faptul de a fi pusă atît de tîrziu, deoarece numai o știință ajunsă la maturitate poate să-i dea un răspuns. Desigur, ochiul omenesc preia o imagine, însă ceea ce vede el în realitate este diferit de această imagine, deoarece impresiile simțurilor sînt prelucrate de creier și aci deprinderile de gîndire formate joacă un rol hotărîtor. Acestea permit iluzii fie optice, fie de alt fel, care în raport cu gradul de cultură al oamenilor pot avea urmări diferite. Pentru a evita însă pe cît posibil aceste amăgiri, trebuie ca totul să fie redus la niște simple citiri ale aparatelor de măsură. Numai aceste rezultate sînt luate în seamă de fizicieni.

Goethe, omul senzațiilor vizuale, profesa o concepție contrară. El se uita și vedea și de aceea era împotriva posibilității unei descompuneri, a unei dizolvări a lumii pestrițe în componente schematice și formule matematice. Chiar și astăzi, cînd cineva aude pentru prima oară că culoarea albă este compusă dintr-un amestec de culori ca cele ale curcubeului, i se pare curios. Din această cauză și *Newton*, care a impus aceste cunoștințe contemporanilor săi, a trebuit să-și efectueze experiențele sale cît mai convingător. Nici o ființă nepărtinitoare nu poate să nege realitatea dovedită de aceste experiențe și totuși *Goethe* le-a combătut cu asprime. În această dispută însă prin teoria sa asupra culorilor *Goethe* a adus totuși și unele contribuții importante în domeniul opticii.

Dacă ar fi vorba de o persoană mai puțin însemnată, poate că am fi trecut cu vederea părerile sale, dar fiind vorba despre *Goethe*, sîntem siliți să lămurim această contradicție. Pentru aceasta este nevoie numai să ne amintim

de propriile cuvinte ale acestui prinţ al poeţilor care spunea : „Omul în sine, în măsura în care se serveşte de simţurile sale sănătoase, este cel mai mare şi mai precis aparat ce poate exista în fizică ; şi tocmai acesta este răul cel mai mare al fizicii moderne, că experienţele au fost separate de oameni şi că recunoaşterea naturii, ba chiar ceea ce ea este capabilă să realizeze, se face numai pe baza a ceea ce arată instrumentele artificiale, voind în acest mod s-o mărginească şi s-o determine".

Goethe a nesocotit progresul făcut în fizică, pe care noi l-am urmărit în cadrul călătoriei noastre prin trecutul fizicii. Ca rezultat al celor mai mari osteneli a perspicacităţii omeneşti a rezultat într-adevăr o problemă nerezolvată. Ar fi fost de mirare dacă ar fi fost altfel. O formulă magică care să ne dezvăluie întreaga realitate, o „dezvăluire a enigmelor lumii" aşa cum o oferă cu mărinimie specularţii şi fantezistii nu există şi nu va exista niciodată. Chiar dacă ar exista demonul lui *Laplace*, nici acesta nu ar fi capabil s-o dea, pentru că şi el a învăţat prea puţină mecanică a cuantelor. Domeniul său nu este din această lume, este domeniul mecanicii clasice, al cărui domeniu pare astăzi foarte restrîns. Ori de cîte ori ştiinţa se credea mai aproape de o rezolvare definitivă a unei probleme, a fost întotdeauna silită de forţa lucrurilor, de noile descoperiri să-şi micşoreze pretenţiile şi să caute noi drumuri. Ceva mai mult, tocmai acele timpuri în care vechea ştiinţă pare să se clatine cel mai rău sînt cu adevărat epocile de glorie ale fizicii, epoci în care se nasc noi teorii.

Înseamnă oare aceasta că în ştiinţa noastră există o continuă schimbare, deci o goană fără oprire şi fără direcţie ? Desigur că nu ! Drumul pe care s-a mers îşi găseşte o dublă justificare. În primul rînd suma cunoştinţelor noastre reale creşte tot mai mult, astăzi chiar într-un ritm de necrezut. Noi ştim astăzi incomparabil mai mult decît predecesorii noştri şi faptele izolate stabilite pe cale experimentală nu sînt atinse de transformările din fizică. O dovadă vizibilă o constituie faptul că tehnica izbuteşte astăzi să domine natura din ce în ce mai mult, iar tehnica este ştiinţă aplicată. Raportul între ştiinţă şi tehnică este acelaşi ca între mamă şi copil, chiar dacă copilul a ajuns de mult la maturitate.

Ceea ce se modifică sînt numai interpretările faptelor izolate, teoriile cu ajutorul cărora se leagă faptele izolate — pe scurt, imaginea fizică a lumii. Epocii noastre i se impută faptul că a distrus în mod voit imaginea bună, veche, docilă a lumii, dată de fizica clasică. Însă după părerea noastră, evoluția științei prezintă în decursul a sute de ani o linie perfect consecventă și tocmai în aceasta rezidă a doua justificare.

Fizica a pornit de la date concrete, de la forțe ca tracțiune și compresiune, de la ciocnire, de la căderea liberă a corpurilor, de la mașini simple ca pîrghia și planul înclinat. Chiar *Galileu*, întemeietorul științei noastre, a arătat direcția în care trebuie să se producă un progres. *Galileu* a extras din materialul faptelor existente noțiunile esențiale care erau necesare pentru o descriere conformă a fenomenelor și a eliberat știința de influențele secundare care o acopereau, tot așa cum un restaurator de tablouri redă figura inițială a unui vechi tablou din haosul adăugirilor întîmplătoare și îl face să apară în forma sa clară, inițială.

Newton a reușit să formuleze concepția grandioasă despre atracția corpurilor și a descoperit legea de mișcare a corpurilor. Prin aceasta noțiunea de forță a fost redusă la ceea ce este esențial; astfel nu mai era necesar să se imagineze spirite cosmice care să conducă stelele pe orbitele lor, ci toate acestea erau datorite gravitației care acționa de la distanță conform unor legi simple. Evident că noțiunea de forță care acționează de la distanță a părut curioasă oamenilor și a fost mai tîrziu înlocuită cu succes prin ideea de cîmp care concepea forțele electromagnetice ca o modificare de stare care se propagă în cîmp, adică sub forma unor forțe ce acționează în apropiere. Ce legătură mai există însă între aceste noțiuni noi și noțiunile inițiale antropomorfe în care se făcea uz de forțele musculare cunoscute de noi toți din viața de toate zilele? Aceste noțiuni noi nu fac decît să se îndepărteze și mai mult de punctul de plecare, ele sînt încă și mai puțin evidente și devin familiare numai după o lungă obișnuință. În această direcție un pas mai departe îl reprezintă introducerea forței de gravitate în „structura geometrică a lumii", deci de asemenea într-un cîmp. Despre natura forțelor din me-

canica cuantică, de exemplu acelea care se exercită în interiorul nucleului atomic, nu ne putem face astăzi încă nici o imagine.

Paralel cu evoluţia noţiunilor din fizică s-au produs schimbări şi în materialul matematic al fizicienilor. Mecanica clasică are nevoie de calculul infinitezimal şi de geometria euclidiană. Mai tîrziu s-a pus la îndoială dacă geometria euclidiană, simplă şi evidentă, este într-adevăr valabilă pentru lumea noastră. *Gauss* a făcut experienţa sa celebră, *Riemann* a pus problema legăturii dintre geometrie şi lumea fizică, iar teoria relativităţii care reprezintă o perfecţionare a vechii mecanici şi care realizează cu adevărat această legătură foloseşte calculul tensorial şi noţiuni din geometria lui *Riemann*. Mecanica cuantelor trece chiar de la spaţii cu patru dimensiuni la acelea cu *n* dimensiuni, la spaţiul lui *Hilbert* şi utilizează calculul operaţional în mod foarte general.

După cum se pare, matematica devine din ce în ce mai abstractă. Totuşi, noi am susţinut în repetate rînduri părerea că chiar şi cele mai complicate noţiuni devin clare, de îndată ce ne-au devenit familiare. Ceea ce ne sperie mai întîi sînt tocmai formulele, noile metode de notare care sînt adesea complicate ; însă raţionamentele fundamentale sînt în majoritatea cazurilor simple şi clare, şi treptat, utilizînd o analogie, se ajunge în cele din urmă ca în ciuda copacilor să se vadă pădurea. Cînd *Gauss* a recomandat să se aplice concepţia spaţială, desigur că el nu era de părerea că aceasta ar fi înnăscută în oameni într-o anumită formă, ci el se gîndea mai curînd că această concepţie poate evolua prin exerciţiu, ceea ce este cu totul conform explicaţiilor noastre.

Şi în acest caz se constată că evoluţia se face în direcţia schiţată mai înainte. Matematica este şi rămîne limbajul potrivit în fizică şi aplicarea pe scară din ce în ce mai largă a matematicii în ştiinţă nu înseamnă altceva decît eliberarea de premisele întîmplătoare ale punctului de plecare — de legătura cu noţiunile foarte simple, evidente — şi acordarea din ce în ce mai bine a limbii noastre cu noile noţiuni. Nu se poate tăgădui că, prin aceasta, ştiinţa pare la început mai dificilă, însă nu se poate tăgădui că în clasele superioare ale şcolilor cunoştinţele însuşite sînt mai vaste

şi pretind alte forme de predare decît acelea din clasele inferioare — lucru de care nu s-a atins încă nimeni pînă acum.

Dacă cineva ar cere ca raţionamentele conducătoare ale unei teorii să fie reprezentate fără matematică şi fără formule, i-am da şi astăzi perfectă dreptate. Evident însă că fizica, în cazul cînd trebuie să-şi expună teoriile din punct de vedere cantitativ, nu poate şi nu a putut niciodată să se lipsească de formule. Ceea ce se poate comunica pe înţelesul tuturor sînt numai principiile fundamentale. Desigur, cu o singură condiţie, şi anume ca aceste principii să fie perfect clare fizicienilor.

Pentru aceasta este necesară o putere de pătrundere care nu trebuie să fie neapărat legată de vîrstă. Dimpotrivă ! La o vîrstă mai înaintată, chiar şi fizicienii renumiţi au alunecat pe pante greşite. Astfel un fizician mult citat în zilele noastre scria : „Spiritul întîlneşte în ordinea obiectivă a naturii secretul propriei sale origini şi constată cum însăşi fiinţa devine oarecum transparentă, ca o purtătoare a unei inexprimabile importanţe".

Nu sînt oare acestea speculaţii fără motive reale? Chiar şi speculaţiile cele mai vechi ale culturii primitive se bazează pe fundamente mai reale. Încă din vechime se observase cu cît produc mai mult oamenii cînd li se vorbeşte frumos. Gîndirea naivă era legată însă de obiecte. Pentru o muncă suplimentară se cerea deci un suflet care să primească îndemnul. Acest proces aş vrea să-l numesc legătura cu obiectul. Faptul că cei mici consideră flacăra ca un obiect, poate fi constatat şi astăzi.

Este ademenitor ca la sfîrşitul acestei cărţi să mai aruncăm o scurtă privire asupra evoluţiei istorice a fizicii. Fizica poate fi exprimată după elementele constructive din care îşi închipuia ea că este constituită lumea. În mecanica clasică se vorbea de puncte materiale, ceea ce înseamnă, desigur, o reprezentare schematică, după cum de altfel şi mecanica clasică reprezintă o clădire abstractă a cărei transpunere în realitate nu reuşeşte întotdeauna. După cum se ştie astăzi, acest edificiu este o extrapolare nepermisă, deoarece pretinde date foarte precise, în timp ce de la început se pun anumite limite. Într-adevăr, fiecare nouă zecimală reprezintă un succes al măsurătorilor, şi acesta cere, la rîndul lui, o nouă imagine a lumii.

Fizica atomică a făcut apoi din punctele materiale, particule elementare. În prima formulare, aceste particule se asemănau mult cu cele dinainte. Ele se concepeau ca niște bucățele foarte mici de materie care se aflau la un moment dat într-un anumit loc. Concepția nouă a rupt cu această reprezentare. După *Broglie* și urmașii săi, particulele elementare trebue reprezentate ca niște unde materiale care se supun unei anumite ecuații, și anume ecuației lui *Schrödinger*. Dar în locul certitudinii dinainte, ecuația lui *Schrödinger* nu ne oferă decît posibilitatea de a întîlni, într-un anumit loc, particulele reprezentate prin unde materiale.

Prin această concepție gîndirea noastră a sfărîmat cătușe vechi de mii de ani. Ne-am dat seama că noțiunea de particulă elementară, după concepția veche asupra atomilor, este desigur prea strîmtă pentru realitatea din fizică. Potopul de particule elementare este totuși oarecum de speriat. Dintre acestea se deosebesc mai întîi trei feluri de particule, și anume : cele ușoare numite leptoni, cele mijlocii, mezoni și cele grele, nucleoni. Fiecare din aceste specii mai au diferiți reprezentanți. Într-adevăr, cam prea mult !

În permanență ne lovim de un dualism curios și greu de înțeles — undă și corpuscul. Numai un amestec din ambele noțiuni poate să ne definească astăzi, pe deplin, realitățile observate, și deci această ipoteză trebuie pusă la baza teoriei actuale. Trebuie să ne mulțumim oare cu aceasta ? Astăzi, majoritatea fizicienilor trebuie să admită că procesul de schimbare a felului de a gîndi nu s-a terminat încă ; dimpotrivă, este de-abia la primele începuturi. Însă chiar și îndrăzneala acestor începuturi este copleșitoare.

Astăzi, noi trăim o fizică în devenire, care a avut, într-adevăr, succese uimitoare, dar care este încă în curs de formare. Tocmai dificultățile care stau în fața fizicii nucleare ne fac să bănuim că va fi necesară încă o modificare a noțiunii fundamentale de particulă elementară. Din această cauză nu este de mirare că la încercarea de a explica cu claritate noua fizică trebuie să se recurgă adeseori la noțiuni insuficiente atunci cînd ne lovim de un paradox, de probleme nerezolvate sau de noțiuni stranii, în prezent neputîndu-ne forma o imagine simplă a lumii, ca în trecut.

Considerăm aceasta însă mai curînd ca un avantaj, decît ca un dezavantaj. Acest fapt dovedeşte că fizica de astăzi este mai plină de viaţă ca niciodată. Noi toţi sîntem azi martorii renaşterii ei, şi în această transformare, pentru care se luptă atît de aprig, asistăm la cel mai grandios spectacol pe care îl cunoaşte istoria ştiinţei.

Abel (1802—1829) 144.
Adams (n. 1870) 233.
Ahmes (~ 1650 î. e. n.) 223.
D'Alambert (1717—1783) 143, 219.
Arhimede (287—212 î. e. n.) 26, 36, 39, 74, 77, 99, 166.
Aristotel (384—322 î. e. n.) 40, 53, 99, 123, 160.

Bacon (1561—1626) 54.
Becquerel (1852—1908) 247, 248.
Bernoulli Daniel (1700—1782) 82, 103, 223.
Bernoulli Jakob (1654—1705) 186, 187, 198.
Bernoulli Johann (1667—1748) 186, 187.
Bethe (1906) 253.
Bohr (1885) 237.
Boltzmann (1844—1906) 104, 110, 111, 223, 224.
Bolyai (1802—1860) 204.
Boscovich (1711—1787) 234.
Bose 110.
Boyle (1627—1691) 223.
Bredwardin (1290—1349) 74.
Broglie (de) (1893) 112, 113, 118, 225, 237, 260.
Bruno Giordano (1548—1600) 131.
Bunsen (1811—1899) 107.

Cardano (1501—1576) 142.
Cauchy (1789—1857) 81, 143. 185.
Cavalieri (1598—1647) 75, 76.
Clifford (1845—1879) 244.
Cariolis (1792—1843) 210.
Coulomb (1736—1806) 249.

Dante (1265—1321) 89.
Davisson (1881) 118, 236.
Dedekind (1831—1916) 156, 166.
Descartes (1596—1650) 65, 70, 150.
Diderot (1713—1784) 219.
Dirac (1902) 111, 244, 245. 246.

Einstein (1879—1955) 106, 111, 229.
Euclid (anul 3 î.e.n.) 82, 91, 92, 181, 204, 205.
Euler (1707—1783) 82, 128, 129, 143, 185, 187, 216, 217, 218.

Faraday (1791—1867) 45, 102, 103, 104.
Fermat (1601—1665) 110.
Fermi (1901—1954) 111, 251.
Flammarion (1842—1925) 45, 46.
Fresnel (1788—1827) 97, 98, 103.
Friedmann (1888—1925) 84.

Galileu (1564—1642) 36, 40, 41, 42, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 71, 73, 74, 75, 123, 209, 257.

Galois (1811—1832) 114, 149, 150.
Gauss (1777—1855) 36, 92, 93, 124, 128, 143, 204, 258.
Germer (1896) 118, 236.
Goethe (1749—1832) 96, 104, 132, 255, 256.
Goudsmit (1902) 245.

H*ahn* (1879) 251.
Halley (1656—1742) 63.
Hallwachs (1859—1922) 105.
Hamilton (1805—1865) 113, 114, 219.
Hankel (1839—1873) 143.
Heaviside (1850—1925) 175.
Heisenberg (1901) 117, 237, 239, 250.
Helmholtz (1821—1894) 104, 234.
Hertz (1857—1894) 94, 104, 105.
Hilbert (1862—1943) 116, 193, 194, 204, 205, 237.
Hittorf (1824—1914) 203, 204
Hooke (1636—1703) 63.
Huygens (1629—1695) 70, 94, 98, 99, 102, 103, 215.

K*elvin* (1824—1907) 234.
Kepler (1571—1630) 22, 63, 76, 77, 81, 231.
Kirchhof (1824—1887) 97, 103, 104, 107.
Klein (1849—1925) 203.
Kudar 245.

L*agrange* (1736—1813) 185, 217.
Laplace (1749—1827) 37, 70, 71, 222, 223, 256.
Lebesque (1875—1941) 169, 195.
Leibniz (1646—1716) 34, 47, 64, 79, 80, 81, 107, 118, 143, 174, 178, 186, 229.
Lénard (1862—1947) 105, 237.
Leonardo da Vinci (1452—1519) 26, 42.
Lionville (1801—1882) 114.
Lloyd (1800—1881) 113.
Lobacevski (1793—1856) 204.
Lorentz (1853—1928) 226.

M*ach* (1838—1926) 70, 202, 203.
Magnus (1802—1870) 204.
Maupertuis (1698—1759) 218.
Maxwell (1831—1879) 94, 103, 104, 105, 106, 108, 109, 110, 222.
Millikan (1868) 105, 106.
Minkowski (1864—1909) 91, 228.

N*eumann* (1832—1925) 195, 202.
Neumann (1903) 238, 240.
Newton (1642—1727) 22, 36, 37, 47, 55, 57, 58, 59, 60, 63, 64, 65, 69, 70, 71, 73, 80, 81, 98, 99, 118, 208, 209, 211, 222, 230, 253 255, 257.

O*ersted* (1777—1851) 102, 103.

P*ascal* (1623—1662) 70, 79, 110, 220.
Planck (1858—1947) 105, 107, 108, 110, 118, 237.
Poincaré (1854—1912) 234, 247.
Poggendorff (1796—1877) 202, 203, 204.
Poinsot (1777—1859) 37.
Proklos (410—485) 92.
Prout (1786—1850) 246, 250.

R*iemann* (1826—1866) 229, 258.
Roentgen (1845—1923) 247.

Rowland (1848—1901) 100.
Rutherford (1871—1937) 237, 248.

Schrödinger (1887) 113, 235, 237, 238, 241, 244, 245.
Sklodovska-Curie (1867—1934) 248.
Stevin (1548—1620) 43.

Tartaglia (m. 1557) 52.
Torricelli (1608—1647) 55, 203.

Uhlembeck (1900) 245.

Voltaire (1694—1778) 65, 218.

Yukawa (1907) 241, 242.

Accelerație gravitațională 49, 58.
Analiză combinatorie 127.

Bomba atomică 250, 252.
Bomba cu hidrogen 253.

Calcul infinitezimal 64, 73, 74, 80, 81, 84, 116, 118, 177, 178, 181, 182, 184, 185, 215, 258.
Calcul variațional 185, 186, 217.
Calculul probabilităților 110, 196, 197, 198, 236.
Căderea încetinită 48, 49.
Cîmp conservativ de forțe 45.
Cîmp electromagnetic 103, 104.
Constanta lui Planck 106, 235.
Contracția lungimii 90, 227.
Corp negru 107.
Cuantă de lumină 118.

Densitate 59.
Deplasare virtuală 35, 215.
Determinism 71.
Dilatarea timpului 90, 227.
Difracția luminii 97, 98.

Ecuația lui D'Alambert 114, 219.
Ecuația canonică 219.
Ecuația diferențială a lui Euler 217.
Ecuația lui Dirac 244, 245.
Ecuația lui Lagrange 114, 215, 217.
Ecuația undei 97, 112, 113, 235.
Ecuația lui Schrödinger 113, 115, 235, 236, 241, 260.
Efect tunel 237.
Electronvolt 249, 251, 252.
Energia cinetică 72, 73, 105, 106, 217, 219, 223, 233.
Energia potențială 72, 73, 228, 235, 252.
Energie de legătură 251.
Erg 106.
Eter 94.

Flux 65, 66, 67, 68.
Formula lui Kirchhoff 97, 100.
Forță aparentă 61, 210, 212.
Forță de atracție 55, 56, 61, 62.
Forță centrifugă 61, 210, 211, 212.
Forță Coriolis 210, 211, 212.
Forță de legătură 213, 214, 215, 219.
Forțe conservative 72.
Foton 106, 107, 108, 109, 110, 113, 117, 118, 233, 235, 245.
Frecvență 95, 105, 106, 113, 196, 198, 233, 235.

Geometria lui Riemann 74, 184, 258.
Grup 143, 144, 145, 146, 147.
Grupul lui Abel 144.

Ideal 147.
Impuls 89, 90, 96, 112, 113, 117, 225, 235, 239.

Inel 147, 148.
Infinit mic 77, 79, 81, 214.
Integrala lui Riemann 168.
Interferență 96, 98, 99, 100, 102.

Legea lui Baer 212.
Legea căderii corpurilor 47, 54, 59, 69, 74.
Legea conservării energiei 44, 105, 228, 260.
Legea inerției 51, 52, 53, 54, 57, 202, 230, 231.
Legea mișcării corpurilor 57.
Legea pîrghiilor 28, 53.
Lungime de undă 95, 97, 99, 100, 101, 104, 106, 113, 117, 235, 245, 247, 249.

Masa de repaus 241, 242.
Masă 71, 74, 82, 83, 84, 86, 89, 90, 95, 108, 209, 224, 225, 253.
Matrice 190, 191, 192, 193, 194.
Măsură 169.
Mecanica mediului deformabil 220.
Molecula 101.
Moment static 25, 27, 36

Neutron 243, 250, 251, 252, 253, 254.
Nucleoni 260.
Număr complex 142, 143, 149, 191.
Număr imaginar 142.
Număr real 149.

Operator 116, 175, 191, 194, 216.
Operatorul lui Laplace 235.
Optică 94, 99.

Plan înclinat 30, 31, 32, 35, 41, 44, 48, 49, 50, 51, 54, 56, 78, 257.
Potențial 72, 105.
Pozitron 246, 250, 260.
Principiul lui Hamilton 217.
Probabilitate 194, 197.
Problema continuului 137.
Produs scalar 192.
Progresie aritmetică 125, 128.
Progresie geometrică 160, 162.
Punct material 34, 35, 61, 68, 69, 74, 93, 220, 259, 260.

Radiația beta 249.
Radiația corpului negru 107, 110, 112.
Radiația gama 249.
Radioactivitatea 250, 251.
Raza nucleului 242.
Raze catodice 203.
Raze Roentgen 97, 101, 118, 247, 249.
Relație de nedeterminare 117, 239.
Rețea 100, 101, 113.

Sistem inerțial 62, 63, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 206, 208, 210, 229.
Spațiu absolut 61, 62, 208, 210.
Spațiu Hilbert 116, 193, 194, 195, 237, 238, 258.
Spațiu linear 188, 189, 190.
Spațiu fazelor 117, 232.
Spin 245.
Spinor 192.
Statică 32, 33, 40, 53, 56, 57, 73.

Șir 128, 134, 136, 137, 139, 155, 157, 163, 197.

Tensor 192, 220.
Timp 71, 80, 88, 90, 201.
Transformări lineare 91, 194.

Transformări ortogonale 191.
Transformările lui Lorentz 91, 226, 243, 244.

Unde materiale 112, 113, 118, 236, 260.

Valoare proprie 191.
Variabilă independentă 219.
Vector 54, 188, 190, 191, 192, 211.
Vector unitar 189.
Viteza luminii 45, 46, 227.

CUPRINS

Pag.

Prefaţa 5

Prefaţă la ediţia a III-a 17

PE DRUMUL DESCOPERIRILOR

Un savant voia să răstoarne lumea 21

Galileu şi legile căderii corpurilor 40

Newton şi opera sa 55

Calculul infinitezimal, adevărată vrăjitorie 73

Evoluţia legilor mişcării 82

„Lumina" o formă de electricitate 94

Planck explică salturile din natură 105

RAŢIONEAZĂ MATEMATICIENII ÎN ALT MOD?

Arta de a aduna 123

Geometria cauciucului 128

Teoria mulţimilor şi rezultatele ei paradoxale 131

Calcule în care intervine şi infinitul 134

Un tînăr de 17 ani, creatorul algebrei moderne . . 141

Geometria în cifre 150

Secretul continuităţii 152

Ahile şi valoarea limită 159

Despre aria domeniilor cu frontiere curbilinii . . . 163

Ce este o integrală? 166

Despre liniile curbe şi tangentele lor 170

Practica este mai importantă decît teoria 179

La o parte cu Euclid 181

Învingător în întrecerea conţinuturilor 184

Pag.

Calcule cu mărimi dirijate 187
Un spaţiu cu infinit de multe dimensiuni 193
Regulile hazardului 195

TREBUIE SĂ RAŢIONĂM ALTFEL

Despre spaţiu şi timp 201
Despre forţe şi legături 208
Şi legile mişcării au principii 213
O nouă lege a mişcării 222
Cum se comportă particulele cele mai mici ? 234
Întrecere în descoperiri 241
De la aparenţă la realitate 255

Indice de nume 263
Indice de numiri 266

ERATĂ

Pag.	Rîndul:	În loc de:	Se va citi:	Din vina:
134	2 de jos	infinit şiret	şir infinit	Edit.
160	2 de jos	s_{n+}	s_{n+1}	Tipogr.
192	9 de sus	$\sqrt{\vec{x}_1\vec{x}_1+\vec{x}_2\vec{x}_2+\ldots+\vec{x}_n\vec{x}_n}$	$\sqrt{x_1^*x_1+x_2^*x_2+\ldots+x_n^*x_n}$	Edit.
192	13 de sus	$x_1y^*+x_2y_2^*+\ldots+x_n^*y$	$x_1^*y_1+x_2^*y_2+\ldots+x_ny^*$	Tipogr.
217	4 de jos	ecuaţiile lui şi *Euler* şi ale principiului lui *Hamilton*	ecuaţiile lui *Euler* şi ale principiului lui *Hamilton*	Edit.

Fizica trăită

I. P. Cluj 10302|1959

Tehnoredactor: Gh. Popovici
Corector: Gh. Argint

Dat la cules 11. 09. 59. Bun de tipar: 25. 11. 59. Tiraj: 6000+160 exemplare. Hîrtie: semivelină de 65 gr./m². Format: 54×84/16. Coli editoriale: 14,52. Coli de tipar: 17. A.:04950/1959. Pentru bibliotecile mari indicele de clasificare: 53. Pentru bibliotecile mici indicele de clasificare 53.

Tiparul executat la Intreprinderea Poligrafică Cluj, str. Brassai nr. 5—7. R.P.R. 7669/1959.

Ę: 4950